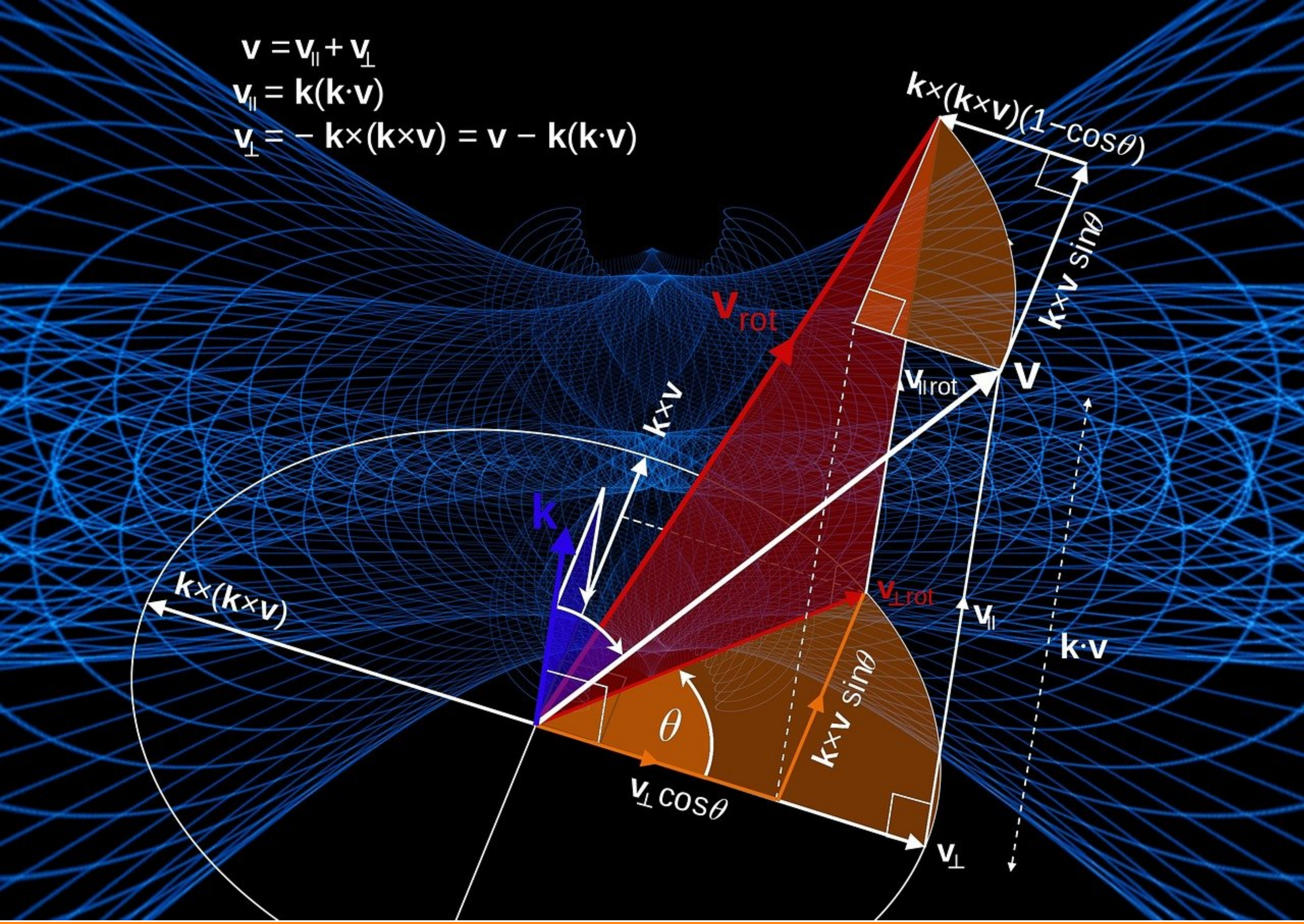


Exercícios de Complementos de Álgebra Linear e Geometria Analítica

Autores: Irene Brito e Gaspar J. Machado

Instituição: Universidade do Minho

Data: dezembro 2020

Versão: 1.0

Índice

D

Capítulo 1 Produto interno em $\mathbb{R}^n$

1.1 Exercícios

1. Sejam $u = (2, -2, 3), v = (1, -3, 4)$ e $w = (3, 6, -4)$. Calcule as seguintes expressões:

   (a) $\|u + v\|$.
   (b) $\|u\| + \|v\|$.
   (c) $\| -2u\| + 2\|u\|$.
   (d) $\|3u - 5v + w\|$.
   (e) $\frac{1}{\|w\|}u$.
   (f) $\left\|\frac{1}{\|w\|}u\right\|$.

2. Suponha que u, v e w são vetores tais que $u \cdot v = 2$, $v \cdot w = -3$, $u \cdot w = 5$, $\|u\| = 1$, $\|v\| = 2$, $\|w\| = 7$. Calcule as seguintes expressões:

   (a) $(u + v) \cdot (v + w)$.
   (b) $(2v - w) \cdot (3u + 2w)$.
   (c) $(u - v - 2w) \cdot (4u + v)$.
   (d) $\|u + v\|$.
   (e) $\|2w - v\|$.
   (f) $\|u - 2v + 4w\|$.

3. Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano, $u, v, w \in V$ e $k \in \mathbb{R}$. Explique porque é que as seguintes expressões não fazem sentido:
   (a) $u \cdot (v \cdot w)$.
   (b) $(u \cdot v) + w$.
   (c) $k \cdot (u + v)$.
4. Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano e $u, v \in V$. Mostre que:
   (a) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.
   (b) $u \cdot v = \frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2$.
5. Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano e a aplicação
$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|: & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x \cdot x}. \end{array}$$
   Mostre que $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado.
6. Mostre que a Desigualdade de Cauchy-Schwarz é válida considerando os seguintes vetores usando o produto interno usual:
   (a) $u = (3, 1), v = (4, -1)$.
   (b) $u = (-3, 1, 0), v = (2, -1, 3)$.
   (c) $u = (0, -2, 2, 1), v = (-1, -1, 1, 1)$.
7. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.
   (a) Prove que a Desigualdade de Cauchy-Schwarz se transforma numa igualdade se e só se os vetores em causa são linearmente dependentes.

(b) Prove que a Desigualdade Triangular se transforma numa igualdade se e só se um dos vetores em causa se escreve à custa do outro por meio de um coeficiente real não negativo.

8. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Calcule o seno e o cosseno do ângulo formado pelos vetores $a = (1, 1, 1)$ e $b = (1, -2, 3)$.
9. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Calcule o cosseno do ângulo formado pelos vetores $a = (4, 3, 1, -2)$ e $b = (-2, 1, 2, 3)$.
10. Sejam (e_1, e_2, e_3) uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ e $u = e_1 + e_2$ e $v = e_2 + e_3$ dois vetores de $\mathbb{R}^3$. Determine os comprimentos dos vetores u e v e o ângulo θ por eles definido.
11. Sejam $u = (\alpha, \beta, 5)$, $v = (\alpha, \beta, -1)$, $w = (-\beta, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$. Determine para que valores reais de α e β os vetores u, v, w são perpendiculares dois a dois.
12. Considere os vetores $a = (1, 0, 1)$ e $b = (0, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Determine o vetor c de comprimento igual a $\sqrt{6}$ do plano definido pelos vetores a e b, tal que o ângulo θ que faz com o vetor a coincide com o ângulo que o mesmo vetor faz com b. Determine também o ângulo θ.
13. Mostre que se u e v são vetores ortogonais de um espaço euclidiano, então $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
14. Mostre que se u e v são vetores ortogonais de um espaço euclidiano tais que $\|u\| = \|v\| = 1$, então $\|u - v\| = \sqrt{2}$.
15. Sejam $a = (2, 1, 2)$ $b = (-2, 2, 1)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Mostre que a e b são perpendiculares entre si e determine todos os vetores que são perpendiculares simultaneamente a a e b de comprimento igual a $\|a\|\|b\|$.
16. Considere os vetores $v_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $v_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $v_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ de $\mathbb{R}^3$.
    (a) Mostre que v_1, v_2, v_3 formam uma base ortogonal.
    (b) Mostre que v_1, v_2, v_3 formam uma base ortonormada.
17. Considere os seguintes conjuntos de vetores de $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned}
&A = \{(0, 1), (2, 0)\},\\
&B = \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\},\\
&C = \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\},\\
&D = \{(0, 0), (0, 1)\}.
\end{aligned}$$
    (a) Determine quais dos conjuntos são conjuntos ortogonais.
    (b) Determine quais dos conjuntos são conjuntos ortonormados.
18. Considere os seguintes conjuntos de vetores de $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{aligned}
&A = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\},\\
&B = \left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\},
\end{aligned}$$

$$C = \left\{ (1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,0,1) \right\}.$$

(a) Determine quais dos conjuntos são conjuntos ortogonais.

(b) Determine quais dos conjuntos são conjuntos ortonormados.

19. Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base ortonormada de um espaço euclidiano $(V, \cdot)$. Mostre que se $w \in V$, então $\|w\|^2 = (w \cdot v_1)^2 + (w \cdot v_2)^2 + (w \cdot v_3)^2$.

20. Sejam $(V, \cdot)$ um espaço euclidiano e W um subespaço de V. Mostre que $W^\perp$ é um subespaço de V.

21. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Determine os complementos ortogonais dos seguintes conjuntos:

    (a) $X = \{(1,0,1)\}$.

    (b) $Y = \{(1,0,1), (1,2,-1)\}$.

    (c) $F = \langle (1,0,0) \rangle$.

    (d) $G = \langle (1,0,1), (1,2,-1) \rangle$.

22. Determine o complemento ortogonal do subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos seguintes vetores:

    (a) $v_1 = (1,-1,3)$, $v_2 = (5,-4,-4)$, $v_3 = (7,-6,2)$.

    (b) $v_1 = (2,0,-1)$, $v_2 = (4,0,-2)$.

    (c) $v_1 = (1,4,5,2)$, $v_2 = (2,1,3,0)$, $v_3 = (-1,3,2,2)$.

    (d) $v_1 = (1,2,3)$.

23. Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

    (a) Determine bases para o espaço das linhas de A e para o espaço nulo de A.

    (b) Verifique que todo o vetor do espaço das linhas de A é ortogonal a todo o vetor do espaço nulo de A.

    (c) Determine bases para o espaço das colunas de A e para o espaço nulo de A^{T}.

    (d) Verifique que todo o vetor do espaço das colunas de A é ortogonal a todo o vetor do espaço nulo de A^{T}.

24. Determine a projeção ortogonal de u sobre a e também o vetor $u - \operatorname{proj}_a u$, que é ortogonal a $\operatorname{proj}_a u$, considerando os seguintes vetores:

    (a) $u = (2,-1,3)$, $a = (4,-1,2)$.

    (b) $u = (6,2)$, $a = (3,-9)$.

    (c) $u = (-1,-2)$, $a = (-2,3)$.

    (d) $u = (3,1,-7)$, $a = (1,0,5)$.

    (e) $u = (1,0,0)$, $a = (4,3,8)$.

25. Determine $\|\operatorname{proj}_a u\|$ para os seguintes vetores:

    (a) $u = (1,-2)$, $a = (-4,-3)$.

    (b) $u = (5,6)$, $a = (2,-1)$.

    (c) $u = (3,0,4)$, $a = (2,3,3)$.

    (d) $u = (3,-2,6)$, $a = (1,2,-7)$.

26. Considere o vetor $x = (1,0,2)$ de $\mathbb{R}^3$. Determine a projeção ortogonal de x sobre um

vetor y do plano definido pelos vetores $e_1 = (1,0,0)$ e $e_2 = (0,1,0)$. Sabe-se que y faz um ângulo igual a $\pi/4$ com e_1 e um ângulo igual a $\pi/4$ com e_2.

27. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Usando o método de Gram-Schmidt, obtenha a partir dos vetores da base $e_1 = (1,2,-2)$, $e_2 = (4,3,2)$, $e_3 = (1,2,1)$ uma base ortonormada $\{w_1, w_2, w_3\}$.
28. Considere o subespaço $F = \langle(1,-1,0),(2,0,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Determine uma base ortonormada de F.
29. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar as seguintes bases de $\mathbb{R}^2$ em bases ortonormadas:
    (a) $\{(1,-3),(2,2)\}$.
    (b) $\{(1,0),(3,-5)\}$.
30. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$ em bases ortonormadas:
    (a) $\{(1,1,1),(-1,1,0),(1,2,1)\}$.
    (b) $\{(1,0,0),(3,7,2),(0,4,1)\}$.
31. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar a base
$$\{(0,2,1,0),(1,-1,0,0),(1,2,0,-1),(1,0,0,1)\}$$
de $\mathbb{R}^4$ numa base ortonormada.
32. Sejam $W = \langle(1,2,1),(2,1,-1)\rangle$ e $v = (-1,1,2)$. Determine $\operatorname{proj}_W v$ e $\operatorname{proj}_{W^\perp} v$.
33. Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e $x \in W$. Mostre que $\operatorname{proj}_W x = x$.
34. Sejam a projeção ortogonal de u no subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores v_1 e v_2.
    (a) $u = (2,1,3)$, $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,2,1)$.
    (b) $u = (1,-6,1)$, $v_1 = (-1,2,1)$, $v_2 = (2,2,4)$.
35. Determine a decomposição QR das seguintes matrizes:
    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.
    (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.
    (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
    (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.
    (e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
36. Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.
    (a) Determine a sua solução de mínimos quadrados.
    (b) Determine a projeção ortogonal de b no espaço das colunas de A.
37. Determine o sistema normal associado a $Ax = b$ para os seguintes sistemas de equações lineares:
    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

38. Determine a solução de mínimos quadrados dos seguintes sistemas de equações lineares $Ax = b$ e calcule a projeção ortogonal de b no espaço das colunas de A:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

39. Determine a projeção ortogonal de $u = (1, -6, 1)$ no subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (-1, 2, 1)$ e $v_2 = (2, 2, 4)$ usando o Método dos mínimos quadrados.

40. Considere as seguintes observações que são resultados de uma experiência:

x	-1	0	1	2
y	0	1	3	9

Suspeita-se que y seja uma função quadrática de x

$$y = a + bx + cx^2.$$

Determine a função quadrática usando o método de mínimos quadrados.

41. Determine a solução de mínimos quadrados do sistema de equações lineares $Ax = b$, sabendo que $A = QR$, com as matrizes Q, R e b dadas a seguir.

(a) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

42. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$. Usando a decomposição QR, determine a solução de mínimos quadrados de $Ax = b$.

1.2 Resoluções

1. Sejam $u = (2, -2, 3)$, $v = (1, -3, 4)$ e $w = (3, 6, -4)$. Calcule as seguintes expressões:

(a) $\|u + v\|$.

(b) $\|u\| + \|v\|$.

(c) $\| - 2u\| + 2\|u\|$.

(d) $\|3u - 5v + w\|$.

(e) $\frac{1}{\|w\|}u$.

(f) $\left\|\frac{1}{\|w\|}u\right\|$.

(a)

$$\|u + v\| = \|(2, 2, -3) + (1, -3, 4)\| = \|(3, -5, 7)\| = \sqrt{9 + 25 + 49} = \sqrt{83}.$$

(b)

$$\begin{aligned}\|u\| + \|v\| &= \|(2, 2, -3)\| + \|(1, -3, 4)\| \\ &= \sqrt{4 + 4 + 9} + \sqrt{1 + 9 + 16} \\ &= \sqrt{17} + \sqrt{26}.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\| - 2u\| + 2\|u\| &= \| - 2(2, 2, -3)\| + 2\|(2, 2, -3)\| \\ &= \|(-4, -4, 6)\|\| + 2\sqrt{17} \\ &= \sqrt{68} + 2\sqrt{17}.\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\|3u - 5v + w\| &= \|3(2, -2, 3) - 5(1, -3, 4) + (3, 6, -4)\| \\ &= \|(6, -6, 9) - (5, -15, 20) + (3, 6, -4)\| \\ &= \|(4, 15, -15)\| \\ &= \sqrt{16 + 225 + 225} \\ &= \sqrt{466}.\end{aligned}$$

(e)

$$\frac{1}{\|w\|}u = \frac{1}{\|(3, 6, -4)\|}(2, -2, 3) = \frac{1}{\sqrt{9 + 36 + 24}}(2, -2, 3) = \frac{1}{\sqrt{61}}(2, -2, 3).$$

(f)

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\|w\|}u\right\| &= \left\|\frac{1}{\|(3, 6, -4)\|}(2, -2, 3)\right\| \\ &= \left\|\frac{1}{\sqrt{61}}(2, -2, 3)\right\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{61}}\|(2, -2, 3)\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{61}}\sqrt{17} \\ &= \sqrt{\frac{17}{61}}.\end{aligned}$$

2. Suponha que u, v e w são vetores tais que $u \cdot v = 2$, $v \cdot w = -3$, $u \cdot w = 5$, $\|u\| = 1$, $\|v\| = 2$, $\|w\| = 7$. Calcule as seguintes expressões:

(a) $(u + v) \cdot (v + w)$.

(b) $(2v - w) \cdot (3u + 2w)$.

(c) $(u - v - 2w) \cdot (4u + v)$.

(d) $\|u + v\|$.

(e) $\|2w - v\|$.

(f) $\|u - 2v + 4w\|$.

(a)

$$\begin{aligned}(u + v) \cdot (v + w) &= u \cdot v + u \cdot w + v \cdot v + v \cdot w \\ &= 2 + 5 + \|v\|^2 - 3 \\ &= 2 + 5 + 4 - 3 \\ &= 8.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(2v - w) \cdot (3u + 2w) &= 2 \times 3 \times (v \cdot u) + 2 \times 2 \times (v \cdot w) - 3(w \cdot u) - 2(w \cdot w) \\ &= 6 \times 2 + 4 \times (-3) - 3 \times 5 - 2\|w\|^2 \\ &= 12 - 12 - 15 - 2 \times 49 \\ &= -113.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}(u - v - 2w) \cdot (4u + v) &= 4\left((u \cdot u) - (v \cdot u) - 2(w \cdot u)\right) + u \cdot v - v \cdot v - 2(w \cdot v) \\ &= 4\left(\|u\|^2 - 2 - 10\right) + 2 - \|v\|^2 + 6 \\ &= 4(-11) + 2 - 4 + 6 \\ &= -40.\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\|u + v\| &= \sqrt{(u + v) \cdot (u + v)} \\ &= \sqrt{\|u\|^2 + 2(u \cdot v) + \|v\|^2} \\ &= \sqrt{1 + 4 + 4} \\ &= 3.\end{aligned}$$

(e)

$$\|2w - v\| = \sqrt{4\|w\|^2 - 4(w \cdot v) + \|v\|^2} = \sqrt{4 \times 49 + 12 + 4} = \sqrt{212}.$$

(f)

$$\begin{aligned}\|u - 2v + 4w\| &= \sqrt{\|u\|^2 - 4(u \cdot v) + 8(u \cdot w) + 4\|v\|^2 - 16(v \cdot w) + 16\|w\|^2} \\ &= \sqrt{1 - 8 + 40 + 16 + 48 + 16 \times 49} \\ &= \sqrt{881}.\end{aligned}$$

3. Sejam $(V,\cdot)$ um espaço euclidiano, $u,v,w \in V$ e $k \in \mathbb{R}$. Explique porque é que as seguintes expressões não fazem sentido:
   (a) $u \cdot (v \cdot w)$.
   (b) $(u \cdot v) + w$.
   (c) $k \cdot (u + v)$.

   (a) Como $v \cdot w$ é um escalar, não é possível calcular o produto interno entre u e $v \cdot w$.
   (b) Como $u \cdot v$ é um escalar, não é possível calcular a soma deste escalar com o vetor w.
   (c) Como k é um escalar e $u + v$ é um vetor, não está definido o produto interno entre k e $u + v$.

4. Sejam $(V,\cdot)$ um espaço euclidiano e $u, v \in V$. Mostre que:
   (a) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.
   (b) $u \cdot v = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$.

   (a)
$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= (\sqrt{(u+v)\cdot(u+v)})^2 + (\sqrt{(u-v)\cdot(u-v)})^2 \\
&= u\cdot u + u\cdot v + v\cdot u + v\cdot v + u\cdot u - u\cdot v \\
&\quad - v\cdot u + v\cdot v \\
&= 2(u\cdot u) + 2(v\cdot v) \\
&= 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.
\end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 &= \frac{1}{4}(\sqrt{(u+v)\cdot(u+v)})^2 - \frac{1}{4}((u-v)\cdot(u-v))^2 \\
&= \frac{1}{4}(u\cdot u + u\cdot v + v\cdot u + v\cdot v) \\
&\quad - \frac{1}{4}(u\cdot u - u\cdot v - v\cdot u + v\cdot v) \\
&= \frac{1}{2}(u\cdot v) + \frac{1}{2}(u\cdot v) \\
&= u\cdot v.
\end{aligned}$$

5. Sejam $(V,\cdot)$ um espaço euclidiano e a aplicação
$$\begin{array}{rccc}
\|\cdot\|: & V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& x & \longmapsto & \sqrt{x\cdot x}.
\end{array}$$
   Mostre que $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado.
   $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado se a aplicação $\sqrt{x\cdot x}$ verifica as propriedades da definição de norma.

   - Condição (a): $\forall x, y \in V[\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|]$ (desigualdade triangular).
     Sejam $x, y \in V$. Tem-se
$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y)\cdot(x+y) \\
&= x\cdot x + 2(x\cdot y) + y\cdot y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|x\|^2 + 2(x \cdot y) + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|x \cdot y| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2,
\end{aligned}
$$

onde na primeira desigualdade se usou a propriedade de para qualquer escalar $k \in \mathbb{R}$ se tem $k \leq |k|$ e na segunda desigualdade se aplicou a Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Então, aplicando a raiz quadrada às duas expressões da desigualdade $\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ conclui-se que $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

- Condição (b): $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}[\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|]$.
  Sejam $x \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,
  $$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x) \cdot (\alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x \cdot x)} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\alpha^2}\|x\| = |\alpha|\|x\|.$$
- Condição (c): $\forall x \in V \backslash \{0_V\}[\|x\| > 0]$.
  Seja $x \in V \backslash \{0_V\}$. Como $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ e $x \cdot x > 0$ (pela propriedade (d) definição de produto interno), então $\sqrt{x \cdot x} > 0$ e assim conclui-se que $\|x\| > 0$.
- Condição (d): $\|0_V\| = 0$.
  Tem-se $\|0_v\| = \sqrt{0_V \cdot 0_V} = \sqrt{0} = 0$, onde se usou a propriedade (e) da definição de produto interno.
  Assim, como as condições da definição de norma são válidas, conclui-se que a aplicação dada é uma norma e $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado.

6. Mostre que a Desigualdade de Cauchy-Schwarz é válida considerando os seguintes vetores usando o produto interno usual:

   (a) $u = (3, 1)$, $v = (4, -1)$.
   (b) $u = (-3, 1, 0)$, $v = (2, -1, 3)$.
   (c) $u = (0, -2, 2, 1)$, $v = (-1, -1, 1, 1)$.

   (a) Como
   $$|u \cdot v| = |(3, 1) \cdot (4, -1)| = |12 - 1| = 11$$
   e
   $$\|u\|\|v\| = \|(3, 1)\|\|(4, -1)\| = \sqrt{10}\sqrt{17} = \sqrt{170}(> \sqrt{121} = 11),$$
   é válido que $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$.

   (b) Tem-se
   $$|u \cdot v| = |(-3, 1, 0) \cdot (2, -1, 3)| = |-6 - 1| = 7$$
   e
   $$\|u\|\|v\| = \|(-3, 1, 0)\|\|(2, -1, 3)\| = \sqrt{10}\sqrt{14} = \sqrt{140}(> \sqrt{49} = 7),$$
   logo $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$.

(c) Tem-se

$$|u \cdot v| = |(0, -2, 2, 1) \cdot (-1, -1, 1, 1)| = |2 + 2 + 1| = 5$$

e

$$\|u\|\|v\| = \|(0, -2, 2, 1)\|\|(-1, -1, 1, 1)\| = \sqrt{9}\sqrt{4} = 6,$$

logo é válido que $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$.

7. Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

(a) Prove que a Desigualdade de Cauchy-Schwarz se transforma numa igualdade se e só se os vetores em causa são linearmente dependentes.

(b) Prove que a Desigualdade Triangular se transforma numa igualdade se e só se um dos vetores em causa se escreve à custa do outro por meio de um coeficiente real não negativo.

(a) Pretende-se provar que $|x \cdot y| = \|x\|\|y\|$ se e só se x e y são linearmente dependentes.

- ($\Leftarrow$): Sejam $x, y \in V$ dois vetores linearmente dependentes. Então, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $y = kx$. Calculando $|x \cdot y|$ e $\|x\|\|y\|$, obtém-se

$$|x \cdot y| = |x \cdot kx| = |k||x \cdot x| = |k|\|x\|^2$$

(note que $x \cdot x \geq 0$) e

$$\|x\|\|y\| = \|x\|\|kx\| = |k|\|x\|^2,$$

respetivamente, donde se conclui que as expressões $|x \cdot y|$ e $\|x\|\|y\|$ coincidem.

- ($\Rightarrow$): Sejam $x, y \in V$ tais que $|x \cdot y| = \|x\|\|y\|$.

Supondo que se dá a igualdade, então, na demonstração da Desigualdade de Cauchy-Schwarz tem que se ter

$$4(x \cdot y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 = 0,$$

o que significa que o polinómio

$$(tx + y) \cdot (tx + y) \Leftrightarrow t^2\|x\|^2 + 2t(x \cdot y) + \|y\|^2$$

tem uma raiz de multiplicidade 2. Logo,

$$t = -\frac{x \cdot y}{2\|x\|^2} = -\frac{x \cdot y}{\|x\|^2}$$

e como t é raiz do polinómio, tem-se

$$(tx + y) \cdot (tx + y) = 0 \Leftrightarrow \|tx + y\| = 0,$$

donde se conclui que $tx + y = 0_V$. Substituindo a expressão de t nesta última igualdade obtém-se

$$tx + y = 0_V \Leftrightarrow \left(-\frac{x \cdot y}{\|x\|^2}\right) x + y = 0_V \Leftrightarrow y = \left(\frac{x \cdot y}{\|x\|^2}\right) x,$$

donde se conclui que y é uma combinação linear de x, *i.e.* $y = kx$ com $k = \frac{x \cdot y}{\|x\|^2}$, o que significa que x e y são linearmente dependentes.

(b) Pretende-se provar que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ se e só se $y = kx$, $k \geq 0$.

- ($\Rightarrow$): Sejam $x, y \in V$ dois vetores tais que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Então, pela demonstração da desigualdade triangular (ver resolução do exercício 5.), para haver igualdade tem que se ter
$$x \cdot y = |x \cdot y| = \|x\|\|y\|.$$
Como $|x \cdot y| = \|x\|\|y\|$, conclui-se pelo exercício anterior que x e y são linearmente dependentes, sendo por exemplo $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Então $x \cdot y = x \cdot kx = k(x \cdot x)$ e, como $\|x\|\|y\| \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$, é válido que $k \geq 0$, porque $x \cdot x \geq 0$. Assim, provou-se que $y = kx$, onde $k \geq 0$.
- ($\Leftarrow$): Sejam $x, y \in V$ dois vetores tais que $y = kx$, $k \geq 0$. Então, pelo exercício anterior, como x e y são linearmente dependentes, tem-se $|x \cdot y| = \|x\|\|y\|$. Por outro lado, verifica-se
$$x \cdot y = x \cdot kx = k(x \cdot x) \geq 0.$$
Logo, $x \cdot y = |x \cdot y| = \|x\|\|y\|$ e pela demonstração da desigualdade triangular (ver resolução do exercício 5.) conclui-se que $\|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$, que implica $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

8. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Calcule o seno e o cosseno do ângulo formado pelos vetores $a = (1,1,1)$ e $b = (1,-2,3)$.
Seja $\theta = \angle(a,b)$. Então,
$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|} = \frac{(1,1,1)\cdot(1,-2,3)}{\|(1,1,1)\|\|(1,-2,3)\|} = \frac{1-2+3}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{42}}{21},$$
$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{42}{21^2}} = \sqrt{1-\frac{2}{21}} = \sqrt{\frac{19}{21}}.$$
9. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Calcule o cosseno do ângulo formado pelos vetores $a = (4,3,1,-2)$ e $b = (-2,1,2,3)$.
Seja $\theta = \angle(a,b)$. Então,
$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{a \cdot b}{\|a\|\|b\|}\\ &= \frac{(4,3,1,-2)\cdot(-2,1,2,3)}{\|(4,3,1,-2)\|\|(-2,1,2,3)\|}\\ &= \frac{-8+3+2-6}{\sqrt{16+9+1+4}\sqrt{4+1+4+9}}\\ &= \frac{-9}{\sqrt{30}\sqrt{18}}\\ &= -\frac{\sqrt{15}}{10}.\end{aligned}$$
10. Sejam (e_1, e_2, e_3) uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ e $u = e_1 + e_2$ e $v = e_2 + e_3$ dois vetores de $\mathbb{R}^3$. Determine os comprimentos dos vetores u e v e o ângulo θ por eles definido.
Os comprimentos dos vetores u e v são
$$\|u\| = \|e_1 + e_2\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{(e_1+e_2)\cdot(e_1+e_2)} \\
&= \sqrt{e_1\cdot e_1 + 2(e_1\cdot e_2) + e_2\cdot e_2} \\
&= \sqrt{\|e_1\|^2 + 0 + \|e_2\|^2} \\
&= \sqrt{1+1} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|v\| &= \|e_2+e_3\| \\
&= \sqrt{(e_2+e_3)\cdot(e_2+e_3)} \\
&= \sqrt{e_2\cdot e_2 + 2(e_2\cdot e_3) + e_3\cdot e_3} \\
&= \sqrt{\|e_2\|^2 + 0 + \|e_3\|^2} \\
&= \sqrt{1+1} \\
&= \sqrt{2},
\end{aligned}
$$

respetivamente.

Seja $\theta = \angle(u,v)$. Então,

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|} \\
&= \frac{(e_1+e_2)\cdot(e_2+e_3)}{\|e_1+e_2\|\|e_2+e_3\|} \\
&= \frac{e_1\cdot e_2 + e_1\cdot e_3 + e_2\cdot e_2 + e_2\cdot e_3}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\
&= \frac{\|e_2\|^2}{2} \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

logo $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

11. Sejam $u = (\alpha,\beta,5)$, $v = (\alpha,\beta,-1)$, $w = (-\beta,1,0) \in \mathbb{R}^3$. Determine para que valores reais de α e β os vetores u, v, w são perpendiculares dois a dois.

Os vetores u, v, w são perpendiculares dois a dois se $u\cdot v = 0$, $u\cdot w = 0$ e $v\cdot w = 0$. Assim, tem-se

$$
\begin{aligned}
&u\cdot v = (\alpha,\beta,5)\cdot(\alpha,\beta,-1) = \alpha^2+\beta^2-5 = 0 \\
&u\cdot w = (\alpha,\beta,5)\cdot(-\beta,1,0) = -\alpha\beta+\beta = 0 \\
&v\cdot w = (\alpha,\beta,-1)\cdot(-\beta,1,0) = -\alpha\beta+\beta = 0,
\end{aligned}
$$

que é equivalente ao sistema de equações

$$
\begin{cases} \alpha^2+\beta^2 = 5 \\ \beta(-\alpha+1) = 0 \\ \beta(-\alpha+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 5 \\ \beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \beta^2 = 4 \\ \alpha = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow
$$

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{5} \vee \alpha = -\sqrt{5} \\ \beta = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \beta = 2 \vee \beta = -2 \\ \alpha = 1 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Logo, u, v, w são perpendiculares dois a dois se e só se

$$\left(\alpha \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\} \wedge \beta = 0\right) \vee (\alpha = 1 \wedge \beta \in \{-2, 2\}).$$

12. Considere os vetores $a = (1,0,1)$ e $b = (0,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Determine o vetor c de comprimento igual a $\sqrt{6}$ do plano definido pelos vetores a e b, tal que o ângulo θ que faz com o vetor a coincide com o ângulo que o mesmo vetor faz com b. Determine também o ângulo θ.

Seja $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$. Como $\angle(a, c) = \angle(b, c)$, então tem-se

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot c}{\|a\|\|c\|} = \frac{b \cdot c}{\|b\|\|c\|} &\Leftrightarrow \frac{(1,0,1)\cdot(c_1,c_2,c_3)}{\|(1,0,1)\|\|(c_1,c_2,c_3)\|} = \frac{(0,1,1)\cdot(c_1,c_2,c_3)}{\|(0,1,1)\|\|(c_1,c_2,c_3)\|} \\ &\Leftrightarrow \frac{c_1 + c_3}{\sqrt{2}\|c\|} = \frac{c_2 + c_3}{\sqrt{2}\|c\|} \\ &\Leftrightarrow c_1 = c_2, \end{aligned}$$

logo $c = (c_1, c_1, c_3)$.

Como c pertence ao plano definido por a e b, então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) = (c_1, c_1, c_3),$$

o que significa que o sistema de equações lineares $Ax = b$ com $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $x = \left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right]$ e $b = \left[\begin{smallmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_3 \end{smallmatrix}\right]$ é possível. Aplicando o Método de Gauss, vem

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 1 & 1 & c_3 \end{array}\right] \underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 1 & c_3 - c_1 \end{array}\right] \underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & c_3 - 2c_1 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A) = 2$, então o sistema é possível se e só se $c_3 - 2c_1 = 0 \Leftrightarrow c_3 = 2c_1$. Assim, o vetor c fica definido da forma $c = (c_1, c_1, 2c_1)$.

Tem-se ainda que o comprimento de c é igual a $\sqrt{6}$, então

$$\|c\| = \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{c_1^2 + c_1^2 + 4c_1^2} = \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{6c_1^2} = \sqrt{6} \Leftrightarrow 6c_1^2 = 6 \Leftrightarrow c_1^2 = 1,$$

donde se obtém $c_1 = -1 \vee c_1 = 1$.

Assim, conclui-se que

$$c = (-1,-1,-2) \vee c = (1,1,2).$$

Para $c = (-1,-1,-2)$ o ângulo $\theta = \angle(a, c) = \angle(b, c)$ é dado por

$$\theta = \arccos\left(\frac{(1,0,1)\cdot(-1,-1,-2)}{\|(1,0,1)\|\|(-1,-1,-2)\|}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \arccos\left(\frac{-1-2}{\sqrt{2}\sqrt{6}}\right)\\
&= \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \pi - \frac{\pi}{6}\\
&= \frac{5}{6}\pi
\end{aligned}
$$

e para $c = (1,1,2)$ obtém-se

$$\theta = \arccos\left(\frac{(1,0,1)\cdot(1,1,2)}{\|(1,0,1)\|\|(1,1,2)\|}\right) = \arccos\left(\frac{1+2}{\sqrt{2}\sqrt{6}}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

13. Mostre que se u e v são vetores ortogonais de um espaço euclidiano, então $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Sabe-se que $u \cdot v = 0$ e que $\|u\| = \|v\| = 1$. Então, tem-se

$$
\begin{aligned}
\|u-v\|^2 &= \left(\sqrt{(u-v)\cdot(u-v)}\right)^2\\
&= u\cdot u + 2(u\cdot v) + v\cdot v\\
&= u\cdot u + v\cdot v\\
&= \|u\|^2 + \|v\|^2.
\end{aligned}
$$

14. Mostre que se u e v são vetores ortogonais de um espaço euclidiano tais que $\|u\| = \|v\| = 1$, então $\|u-v\| = \sqrt{2}$.

Sabe-se que $u \cdot v = 0$ e que $\|u\| = \|v\| = 1$. Então, tem-se

$$
\begin{aligned}
\|u-v\| &= \sqrt{(u-v)\cdot(u-v)}\\
&= \sqrt{u\cdot u + 2(u\cdot v) + v\cdot v}\\
&= \sqrt{u\cdot u + v\cdot v}\\
&= \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}\\
&= \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

15. Sejam $a = (2,1,2)$ $b = (-2,2,1)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Mostre que a e b são perpendiculares entre si e determine todos os vetores que são perpendiculares simultaneamente a a e b de comprimento igual a $\|a\|\|b\|$.

Como $a \cdot b = (2,1,2)\cdot(-2,2,1) = -4+2+2 = 0$, então conclui-se que a e b são perpendiculares entre si.

Seja $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $v \perp a \Leftrightarrow v\cdot a = 0$ e $v \perp b \Leftrightarrow v \cdot b = 0$. Estas condições são equivalentes ao sistema de equações lineares

$$
\begin{cases}
2x + \ \ y + 2z = 0\\
-2x + 2y + \ \ z = 0.
\end{cases}
$$

Resolvendo o sistema $A\bar{x} = b$, com $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $\bar{x} = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right]$ e $b = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ pelo Método de Gauss, vem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\text{car}(A) = \text{car}(A|b) = 2 < n = 3$, onde n é o número de incógnitas, conclui-se que o sistema é possível e indeterminado, tendo z como incógnita livre. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + \ y + 2z = 0 \\ \qquad 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{z}{2} \\ y = -z. \end{cases}$$

Assim, tem-se $v = \left(-\frac{z}{2}, -z, z\right)$, onde $z \in \mathbb{R}$.

Sabe-se ainda que $\|v\| = \|a\|\|b\| = \sqrt{9}\sqrt{9} = 9$, logo

$$\|v\| = 9 \Leftrightarrow \sqrt{\left(-\frac{z}{2}\right)^2 + (-z)^2 + z^2} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9z^2}{4}} = 9 \Leftrightarrow z^2 = 36.$$

Daqui resulta que $z = -6 \vee z = 6$.

Então, o vetor que verifica as condições pretendidas é $v = (-3, -6, 6)$ para $z = -6$ ou $v = (3, 6, -6)$ para $z = 6$.

16. Considere os vetores $v_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $v_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $v_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que v_1, v_2, v_3 formam uma base ortogonal.

(b) Mostre que v_1, v_2, v_3 formam uma base ortonormada.

(a) Tem-se

$$v_1 \cdot v_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} = 0$$

$$v_1 \cdot v_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} = 0$$

$$v_2 \cdot v_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0,$$

pelo que os vetores v_1, v_2, v_3 são ortogonais dois a dois. Além disso, como

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3^3} - \frac{8}{3^3} - \frac{8}{3^3} - \frac{4}{3^3} - \frac{4}{3^3} - \frac{4}{3^3} = -\frac{27}{3^3} \neq 0,$$

então v_1, v_2, v_3 são linearmente indendentes e, como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ é igual ao número de vetores considerados, formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Assim, conclui-se que v_1, v_2, v_3 formam uma base ortogonal.

(b) Dado que os vetores v_1, v_2, v_3 formam uma base ortogonal (pela alínea anterior) e como

$$\|v_1\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

$$\|v_3\| = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = 1,$$

então, v_1, v_2, v_3 formam uma base ortonormada.

17. Considere os seguintes conjuntos de vetores de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
A &= \{(0,1),(2,0)\},\\
B &= \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\},\\
C &= \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\},\\
D &= \{(0,0),(0,1)\}.
\end{aligned}$$

(a) Determine quais dos conjuntos são conjuntos ortogonais.

(b) Determine quais dos conjuntos são conjuntos ortonormados.

(a) A é um conjunto ortogonal, porque $(0,1)\cdot(2,0)=0$.

B é um conjunto ortogonal, porque

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0.$$

C não é um conjunto ortogonal, porque

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-1\neq 0.$$

D é um conjunto ortogonal, porque $(0,0)\cdot(0,1)=0$.

(b) A não é um conjunto ortonormado, porque $\|(2,0)\| = 2 \neq 1$.

B é um conjunto ortonormado, porque é um conjunto ortogonal e, além disso,

$$\left\|\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1.$$

C não é um conjunto ortonormado, porque não é um conjunto ortogonal.

D não é um conjunto ortonormado, porque $\|(0,0)\| = 0 \neq 1$.

18. Considere os seguintes conjuntos de vetores de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
A &= \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\},\\
B &= \left\{\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\},\\
C &= \left\{(1,0,0),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),(0,0,1)\right\}.
\end{aligned}$$

(a) Determine quais dos conjuntos são conjuntos ortogonais.

(b) Determine quais dos conjuntos são conjuntos ortonormados.

(a) A não é um conjunto ortogonal, porque

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} \neq 0.$$

B é um conjunto ortogonal, porque

$$\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}=0$$
$$\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=0$$
$$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}-\frac{4}{9}=0.$$

C não é um conjunto ortogonal, porque , $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(0,0,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$

(b) A não é um conjunto ortonormado, porque não é um conjunto ortogonal.

B é um conjunto ortonormado, porque é um conjunto ortogonal e, além disso,

$$\left\|\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}=1$$
$$\left\|\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)\right\|=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=1$$
$$\left\|\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}=1.$$

C não é um conjunto ortonormado, porque não é um conjunto ortogonal.

19. Seja $\{v_1,v_2,v_3\}$ uma base ortonormada de um espaço euclidiano $(V,\cdot)$. Mostre que se $w\in V$, então $\|w\|^2=(w\cdot v_1)^2+(w\cdot v_2)^2+(w\cdot v_3)^2$.

Como $\{v_1,v_2,v_3\}$ é uma base ortonormada, então existem $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tais que

$$w=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3.$$

Tem-se

$$\begin{aligned}\|w\|^2&=\|\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3\|^2\\&=(\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3)\cdot(\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3)\\&=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(w\cdot v_1)^2+(w\cdot v_2)^2+(w\cdot v_3)^2&=((\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3)\cdot v_1)^2\\&\quad+((\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3)\cdot v_2)^2\\&\quad+((\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3)\cdot v_3)^2\\&=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,\end{aligned}$$

pelo que $\|w\|^2=(w\cdot v_1)^2+(w\cdot v_2)^2+(w\cdot v_3)^2$.

20. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Determine os complementos ortogonais dos seguintes conjuntos:

(a) $X=\{(1,0,1)\}$.

(b) $Y=\{(1,0,1),(1,2,-1)\}$.

(c) $F=\langle(0,1,0)\rangle$.

(d) $G=\langle(1,0,1),(1,2,-1)\rangle$.

(a)

$$\begin{aligned}
X^\perp &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : (a,b,c) \perp (1,0,1)\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : (a,b,c) \cdot (1,0,1) = 0\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + c = 0\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = -a\} \\
&= \{(a,b,-a) : a, b \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,0,-1), (0,1,0) \rangle.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
Y^\perp &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : (a,b,c) \perp (1,0,1) \wedge (a,b,c) \perp (1,2,-1)\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : (a,b,c) \cdot (1,0,1) = 0 \wedge (a,b,c) \cdot (1,2,-1) = 0\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + c = 0 \wedge a + 2b - c = 0\}
\end{aligned}$$

Considere o sistema de equações lineares dado por

$$\begin{cases} a \qquad + c = 0 \\ a + 2b - c = 0, \end{cases}$$

ou seja $A\bar{x} = b$, com $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, $\bar{x} = \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right]$ e $b = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Então, tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|b) = 2 < n = 3$, onde n é o número de incógnitas, conclui-se que o sistema é possível e indeterminado, em que c é uma incógnita livre. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a \qquad + \ c = 0 \\ \qquad 2b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = c. \end{cases}$$

Assim, tem-se $Y^\perp = \{(-c,c,c) : c \in \mathbb{R}\} = \langle (-1,1,1) \rangle$.

(c)

$$\begin{aligned}
F^\perp &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \forall (0,y,0) \in F\ [(a,b,c) \perp (0,y,0)]\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \forall (0,y,0) \in F\ [(a,b,c) \cdot (0,y,0) = 0]\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \forall y \in \mathbb{R}\ [by = 0]\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b = 0\} \\
&= \{(a,0,c) : a, c \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle,
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
G^\perp = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \forall (\alpha + \beta, 2\beta, \alpha - \beta) \in G, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\
[(a,b,c) \perp \alpha(1,0,1) + \beta(1,2,-1)]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \forall (\alpha+\beta, 2\beta, \alpha-\beta) \in G, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\
&\qquad [(a,b,c)\cdot(\alpha+\beta,2\beta,\alpha-\beta) = 0]\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}\, [a(\alpha+\beta) + b2\beta + c(\alpha-\beta) = 0]\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}\, [\alpha(a+c) + \beta(a+2b-c) = 0]\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+c = 0 \wedge a+2b-c = 0]\}.
\end{aligned}$$

Considere o sistema de equações lineares dado por

$$\begin{cases} a \qquad + c = 0 \\ a + 2b - c = 0, \end{cases}$$

ou seja $A\bar{x} = b$, com $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, $\bar{x} = \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right]$ e $b = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Então, tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|b) = 2 < n = 3$, onde n é o número de incógnitas, conclui-se que o sistema é possível e indeterminado, em que c é uma incógnita livre. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a \qquad + \ c = 0 \\ \quad 2b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = c. \end{cases}$$

Assim, tem-se $G^\perp = \{(-c,c,c) : c \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,1,1)\rangle$.

21. Seja $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Determine bases para o espaço das linhas de A e para o espaço nulo de A.

(b) Verifique que todo o vetor do espaço das linhas de A é ortogonal a todo o vetor do espaço nulo de A.

(c) Determine bases para o espaço das colunas de A e para o espaço nulo de A^{T}.

(d) Verifique que todo o vetor do espaço das colunas de A é ortogonal a todo o vetor do espaço nulo de A^{T}.

(a) O espaço das linhas de A é dado por

$$\operatorname{EL}(A) = \langle(1,2,-1,2),(3,5,0,4),(1,1,2,0)\rangle.$$

Considere a matriz $C = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ com colunas $c_1 = (1,2,-1,2)$, $c_2 = (3,5,0,4)$, $c_3 = (1,1,2,0)$. Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_1 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - 2\ell_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\substack{\ell_3 \leftarrow \ell_3 + 3\ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - 2\ell_2}]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

observa-se que a matriz em forma escada tem as duas primeiras colunas como colunas pivô, então conclui-se que

$$\mathrm{EL}(A) = \langle (1,2,-1,2),(3,5,0,4),(1,1,2,0)\rangle = \langle (1,2,-1,2),(3,5,0,4)\rangle.$$

Pelo facto da característica da matriz em forma escada formada só pelas primeiras duas colunas ser 2 e o sistema homogéneo $\alpha(1,2,-1,2)+\beta(3,5,0,4) = (0,0,0,0)$ ter duas incógnitas, conclui-se que os vetores $(1,2,-1,2),(3,5,0,4)$ são linearmente independentes. Logo, $\{(1,2,-1,2),(3,5,0,4)\}$ é uma base de $\mathrm{EL}(A)$.
Para determinar o espaço nulo $\mathrm{N}(A) = \mathrm{CS}_{(Ax=\underline{0})}$, resolve-se o sistema de equações lineares $Ax = \underline{0}$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$, vindo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 3\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1}}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A|\underline{0}) = 2 < n = 4$, onde n é o número de incógnitas, conclui-se que o sistema é possível e indeterminado, em que c e d são incógnitas livres. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a + 2b - c + 2d = 0 \\ - b + 3c - 2d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5c + 2d \\ b = 3c - 2d. \end{cases}$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(A) &= \{(-5c+2d, 3c-2d, c, d) : c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-5,3,1,0),(2,-2,0,1)\rangle. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema homogéneo $\alpha(-5,3,1,0) + \beta(2,-2,0,1) = (0,0,0,0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vem

$$\left[\begin{array}{cc|c} -5 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \frac{3}{5}\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + \frac{1}{5}\ell_1}}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} -5 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \frac{1}{2}\ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 + \frac{5}{4}\ell_2}}{\longleftrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -5 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como a característica da matriz dos coeficientes é igual a 2 e coincide com a característica da matriz ampliada e é igual ao número de incógnitas, então o sistema homogéneo é possível e determinado. Logo, os vetores $(-5,3,1,0),(2,-2,0,1)$ são linearmente independentes. Assim, como os vetores são linearmente independentes e formam um conjunto do espaço nulo de A, então $\{(-5,3,1,0),(2,-2,0,1)\}$ é uma base de $\mathrm{N}(A)$.

(b) Seja $v \in \mathrm{EL}(A)$. Então

$$v = \alpha(1,2,-1,2) + \beta(3,5,0,4) = (\alpha+3\beta, 2\alpha+5\beta, -\alpha, 2\alpha+4\beta),$$

onde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Seja $w \in \mathrm{N}(A)$. Então,

$$w = \gamma(-5,3,1,0) + \delta(2,-2,0,1) = (-5\gamma+2\delta, 3\gamma-2\delta, \gamma, \delta),$$

onde $\gamma,\delta \in \mathbb{R}$.

Então, $v \perp w$ se e só se

$$\forall \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}[(\alpha+3\beta, 2\alpha+5\beta, -\alpha, 2\alpha+4\beta)\cdot(-5\gamma+2\delta, 3\gamma-2\delta, \gamma, \delta) = 0].$$

Daqui obtém-se

$$\begin{aligned}
&(\alpha+3\beta, 2\alpha+5\beta, -\alpha, 2\alpha+4\beta)\cdot(-5\gamma+2\delta, 3\gamma-2\delta, \gamma, \delta) = 0 \\
&\quad\Leftrightarrow (\alpha+3\beta)(-5\gamma+2\delta) + (2\alpha+5\beta)(3\gamma-2\delta) - \alpha\gamma + (2\alpha+4\beta)\delta = 0 \\
&\quad\Leftrightarrow -5\alpha\gamma - 15\beta\gamma + 2\alpha\delta + 6\beta\delta + 6\alpha\gamma + 15\beta\gamma - 4\alpha\delta - 10\beta\delta - \alpha\gamma \\
&\qquad +2\alpha\delta + 4\beta\delta = 0 \\
&\quad\Leftrightarrow 0 = 0,
\end{aligned}$$

donde se conclui que $v \perp w$.

(c) O espaço das colunas de A é dado por

$$\mathrm{EC}(A) = \langle (1,3,1),(2,5,1),(-1,0,2),(2,4,0)\rangle.$$

Considere a matriz $C = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ com colunas $c_1 = (1,3,1)$, $c_2 = (2,5,1)$, $c_3 = (-1,0,2)$, $c_4 = (2,4,0)$. Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 3\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

observa-se que a matriz em forma escada tem as duas primeiras colunas como colunas pivô, então conclui-se que

$$\mathrm{EC}(A) = \langle (1,3,1),(2,5,1),(-1,0,2),(2,4,0)\rangle = \langle (1,3,1),(2,5,1)\rangle.$$

Pelo facto da característica da matriz em forma escada formada só pelas primeiras duas colunas ser 2 e o sistema homogéneo $\alpha(1,3,1)+\beta(2,5,1)=(0,0,0)$ ter duas incógnitas, conclui-se que os vetores $(1,3,1),(2,5,1)$ são linearmente independentes, além de formarem um conjunto gerador de $\mathrm{EC}(A)$. Logo, $\{(1,3,1),(2,5,1)\}$ é uma base de $\mathrm{EC}(A)$.

Para determinar o espaço nulo $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{CS}_{(A^{\mathrm{T}}x=\underline{0})}$, resolve-se o sistema de equações lineares $A^{\mathrm{T}}x=\underline{0}$, onde $A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, vindo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_1 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - 2\ell_1}}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{\ell_3 \leftarrow \ell_3 + 3\ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 - 2\ell_2}}{\longleftrightarrow}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\mathrm{car}(A^{\mathrm{T}}) = \mathrm{car}(A^{\mathrm{T}}|\underline{0}) = 2 < n = 3$, onde n é o número de incógnitas, conclui-se que o sistema é possível e indeterminado, em que c é uma incógnita livre. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a + 3b + c = 0 \\ \quad - \ b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = -c. \end{cases}$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}}) &= \{(2c,-c,c) : c \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (2,-1,1)\rangle. \end{aligned}$$

Assim, como o conjunto $\{(2,-1,1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})$ e é linearmente independente, porque contém apenas um vetor que é não nulo, então $\{(2,-1,1)\}$ é uma base de $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})$.

(d) Seja $v \in \mathrm{EC}(A)$. Então $v = \alpha(1,3,1)+\beta(2,5,1)$, com $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Seja $w \in \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})$. Então, $w = \gamma(2,-1,1)$. Pretende-se mostrar que $v \perp w$ ($\Leftrightarrow v \cdot w = 0$). Substituindo as combinações lineares dos vetores v e w nesta condição, obtém-se

$$\begin{aligned} v \cdot w = 0 &\Leftrightarrow (\alpha(1,3,1)+\beta(2,5,1)) \cdot \gamma(2,-1,1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha+2\beta, 3\alpha+5\beta, \alpha+\beta) \cdot (2\gamma,-\gamma,\gamma) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\alpha\gamma + 4\beta\gamma - 3\alpha\gamma - 5\beta\gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0,$$

ficando assim provado que $\forall v \in \mathrm{EC}(A), \forall w \in \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})[v \perp w]$.

22. Determine a projeção ortogonal de u sobre a e também o vetor $u - \operatorname{proj}_a u$, que é ortogonal a $\operatorname{proj}_a u$, considerando os seguintes vetores:

(a) $u = (2, -1, 3)$, $a = (4, -1, 2)$.

(b) $u = (6, 2)$, $a = (3, -9)$.

(c) $u = (-1, -2)$, $a = (-2, 3)$.

(d) $u = (3, 1, -7)$, $a = (1, 0, 5)$.

(e) $u = (1, 0, 0)$, $a = (4, 3, 8)$.

(a)

$$\begin{aligned}\operatorname{proj}_a u &= \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a = \frac{(2, -1, 3) \cdot (4, -1, 2)}{\|(4, -1, 2)\|^2}(4, -1, 2) = \frac{8 + 1 + 6}{16 + 1 + 4}(4, -1, 2) \\ &= \frac{5}{7}(4, -1, 2).\end{aligned}$$

$$u - \operatorname{proj}_a u = (2, -1, 3) - \frac{5}{7}(4, -1, 2) = \frac{1}{7}(-6, -2, 11).$$

(b)

$$\operatorname{proj}_a u = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a = \frac{(6, 2) \cdot (3, -9)}{\|(3, -9)\|^2}(3, -9) = \frac{18 - 18}{9 + 81}(3, -9) = (0, 0).$$

$$u - \operatorname{proj}_a u = (6, 2) - (0, 0) = (6, 2).$$

(c)

$$\operatorname{proj}_a u = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a = \frac{(-1, -2) \cdot (-2, 3)}{\|(-2, 3)\|^2}(-2, 3) = \frac{2 - 6}{4 + 9}(-2, 3) = \frac{1}{13}(8, -12).$$

$$u - \operatorname{proj}_a u = (-1, -2) - \frac{1}{13}(8, -12) = \frac{1}{13}(-21, -14).$$

(d)

$$\begin{aligned}\operatorname{proj}_a u &= \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a = \frac{(3, 1, -7) \cdot (1, 0, 5)}{\|(1, 0, 5)\|^2}(1, 0, 5) = \frac{3 - 35}{1 + 25}(1, 0, 5) \\ &= -\frac{16}{13}(1, 0, 5).\end{aligned}$$

$$u - \operatorname{proj}_a u = (3, 1, -7) + \frac{16}{13}(1, 0, 5) = \frac{1}{13}(55, 13, -11).$$

(e)

$$\begin{aligned}\operatorname{proj}_a u &= \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a = \frac{(1, 0, 0) \cdot (4, 3, 8)}{\|(4, 3, 8)\|^2}(4, 3, 8) = \frac{4}{16 + 9 + 64}(4, 3, 8) \\ &= \frac{4}{89}(4, 3, 8).\end{aligned}$$

$$u - \operatorname{proj}_a u = (1, 0, 0) - \frac{4}{89}(4, 3, 8) = \frac{1}{89}(73, -12, -32).$$

23. Determine $\|\operatorname{proj}_a u\|$ para os seguintes vetores:

(a) $u = (1, -2)$, $a = (-4, -3)$.

(b) $u = (5, 6)$, $a = (2, -1)$.

(c) $u = (3, 0, 4)$, $a = (2, 3, 3)$.

(d) $u = (3, -2, 6)$, $a = (1, 2, -7)$.

(a)
$$\|\operatorname{proj}_a u\| = \frac{|u \cdot a|}{\|a\|} = \frac{|(1,-2)\cdot(-4,-3)|}{\|(-4,-3)\|} = \frac{|-4+6|}{\sqrt{16+9}} = \frac{2}{5}.$$
(b)
$$\|\operatorname{proj}_a u\| = \frac{|u \cdot a|}{\|a\|} = \frac{|(5,6)\cdot(2,-1)|}{\|(2,-1)\|} = \frac{|10-6|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$
(c)
$$\|\operatorname{proj}_a u\| = \frac{|u \cdot a|}{\|a\|} = \frac{|(3,0,4)\cdot(2,3,3)|}{\|(2,3,3)\|} = \frac{|6+12|}{\sqrt{4+9+9}} = \frac{18}{\sqrt{22}} = \frac{9\sqrt{22}}{11}.$$
(d)
$$\|\operatorname{proj}_a u\| = \frac{|u \cdot a|}{\|a\|} = \frac{|(3,-2,6)\cdot(1,2,-7)|}{\|(1,2,-7)\|} = \frac{|3-4-42|}{\sqrt{1+4+49}} = \frac{43}{\sqrt{54}} = \frac{43\sqrt{54}}{54}.$$

24. Considere o vetor $x = (1, 0, 2)$ de $\mathbb{R}^3$. Determine a projeção ortogonal de x sobre um vetor y do plano definido pelos vetores $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$. Sabe-se que y faz um ângulo igual a $\pi/4$ com e_1 e um ângulo igual a $\pi/4$ com e_2.

Seja $y = \alpha e_1 + \beta e_2 = (\alpha, \beta, 0)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Então, tem-se
$$\operatorname{proj}_y x = \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y = \frac{(1,0,2)\cdot(\alpha,\beta,0)}{\|(\alpha,\beta,0)\|^2}(\alpha,\beta,0) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha,\beta,0)$$
e, como
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{y \cdot e_1}{\|y\|\|e_1\|} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$
e
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{y \cdot e_2}{\|y\|\|e_2\|} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$
obtém-se
$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$
Então, o vetor y é dado por $(\alpha, \alpha, 0)$ e, como consequência,
$$\operatorname{proj}_y x = \frac{\alpha}{2\alpha^2}(\alpha,\alpha,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

25. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Usando o método de Gram-Schmidt, obtenha a partir dos vetores da base $e_1 = (1, 2, -2)$, $e_2 = (4, 3, 2)$, $e_3 = (1, 2, 1)$ uma base ortonormada $\{w_1, w_2, w_3\}$.

Aplicando o método de Gram-Schmidt obtém-se:
$$w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{(1,2,-2)}{\|(1,2,-2)\|} = \frac{1}{3}(1,2,-2);$$
$$z_2 = e_2 - w_1\,(e_2 \cdot w_1)$$

$$\begin{aligned}
&= (4,3,2) - \frac{1}{3}(1,2,-2)\ \left((4,3,2)\cdot\frac{1}{3}(1,2,-2)\right)\\
&= (4,3,2) - \frac{2}{3}(1,2,-2)\\
&= \left(\frac{10}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right),
\end{aligned}$$

$$w_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{100}{9}+\frac{25}{9}+\frac{100}{9}}}\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right) = \frac{3}{15}\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right) = \frac{1}{3}(2,1,2);$$

$$\begin{aligned}
z_3 &= e_3 - w_1\ (e_3\cdot w_1) - w_2\ (e_3\cdot w_2)\\
&= (1,2,1) - \frac{1}{3}(1,2,-2)\ \left((1,2,1)\cdot\frac{1}{3}(1,2,-2)\right)\\
&\quad - \frac{1}{3}(2,1,2)\ \left((1,2,1)\cdot\frac{1}{3}(2,1,2)\right)\\
&= (1,2,1) - \frac{1}{3}(1,2,-2) - \frac{2}{3}(2,1,2)\\
&= (0,1,1),
\end{aligned}$$

$$w_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,1,1) = \left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Assim, conclui-se que a base ortonormada $\{w_1, w_2, w_3\}$ obtida a partir dos vetores e_1, e_2, e_3 é dada por

$$\left\{\frac{1}{3}(1,2,-2), \frac{1}{3}(2,1,2), \frac{\sqrt{2}}{2}\,(0,1,1)\right\}.$$

26. Considere o subespaço $F = \langle(1,-1,0),(2,0,1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. Determine uma base ortonormada de F.

Os vetores $(1,-1,0),(2,0,1)$ são linearmente independentes, porque nenhum deles é combinação linear do outro, *i.e.* $\nexists k \in \mathbb{R} : (1,-1,0) = k(2,0,1)$, pelo que $\{(1,-1,0),(2,0,1)\}$ é um a base de F.

Aplicando o método de Gram-Schmidt obtém-se:

$$w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{(1,-1,0)}{\|(1,-1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0);$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= e_2 - w_1\ (e_2\cdot w_1)\\
&= (2,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\ \left((2,0,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\right)\\
&= (2,0,1) - (1,-1,0)\\
&= (1,1,1),
\end{aligned}$$

$$w_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Assim, conclui-se que

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$$

é uma base ortonormada de F.

27. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar as seguintes bases de $\mathbb{R}^2$ em bases ortonormadas:

    (a) $\{(1,-3),(2,2)\}$.

    (b) $\{(1,0),(3,-5)\}$.

    (a) Os vetores $(1,-3),(2,2)$ são linearmente independentes, porque $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2+6=8\neq 0$, e como $\dim(\mathbb{R}^2)=2$ é igual ao número de vetores dados, então $\{(1,-3),(2,2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

    Sejam $e_1=(1,-3)$ e $e_2=(2,2)$. Aplicando o método de Gram-Schmidt obtém-se:

$$w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{(1,-3)}{\|(1,-3)\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,-3);$$

$$\begin{aligned} z_2 &= e_2 - w_1\ (e_2\cdot w_1) \\ &= (2,2) - \frac{1}{\sqrt{10}}(1,-3)\ \left((2,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}(1,-3)\right) \\ &= (2,2) + \frac{2}{5}(1,-3) \\ &= \frac{1}{5}(12,4), \end{aligned}$$

$$w_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{5}{\sqrt{160}}\frac{1}{5}(12,4) = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1).$$

    Assim, conclui-se que a base ortonormada $\{w_1,w_2\}$ obtida a partir dos vetores e_1,e_2 é dada por

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}(1,-3), \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)\right\}.$$

    (b) Os vetores $(1,0),(3,-5)$ são linearmente independentes, porque $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -5\neq 0$, e como $\dim(\mathbb{R}^2)=2$ é igual ao número de vetores dados, então $\{(1,0),(3,-5)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

    Sejam $e_1=(1,0)$ e $e_2=(3,-5)$. Aplicando o método de Gram-Schmidt obtém-se:

$$w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{(1,0)}{\|(1,0)\|} = (1,0);$$

$$\begin{aligned} z_2 &= e_2 - w_1\ (e_2\cdot w_1) \\ &= (3,-5) - (1,0)\ ((3,-5)\cdot(1,0)) \\ &= (3,-5) - (3,0) \\ &= (0,-5), \end{aligned}$$

$$w_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{1}{5}(0,-5) = (0,-1).$$

    Assim, conclui-se que a base ortonormada $\{w_1,w_2\}$ obtida a partir dos vetores e_1,e_2 é dada por

$$\{(1,0),(0,-1)\}.$$

28. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$ em bases ortonormadas:

(a) $\{(1,1,1),(-1,1,0),(1,2,1)\}$.

(b) $\{(1,0,0),(3,7,2),(0,4,1)\}$.

(a) Sejam $e_1=(1,1,1), e_2=(-1,1,0), e_3=(1,2,1)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, os vetores e_1,e_2,e_3 são linearmente independentes, e como $\dim(\mathbb{R}^3)=3$ é igual ao número de vetores, então $\{e_1,e_2,e_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Aplicando o método de Gram-Schmidt obtém-se:

$$w_1=\frac{e_1}{\|e_1\|}=\frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1);$$

$$\begin{aligned} z_2 &= e_2 - w_1\,(e_2\cdot w_1) \\ &= (-1,1,0)-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\,\left((-1,1,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right) \\ &= (-1,1,0)-\frac{1}{3}0 \\ &= (-1,1,0)\,, \end{aligned}$$

$$w_2=\frac{z_2}{\|z_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(-1,1,0)=\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-1,1,0)\,;$$

$$\begin{aligned} z_3 &= e_3 - w_1\,(e_3\cdot w_1) - w_2\,(e_3\cdot w_2) \\ &= (1,2,1)-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\,\left((1,2,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right) \\ &\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-1,1,0)\,\left((1,2,1)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-1,1,0)\right) \\ &= (1,2,1)-\frac{4}{3}(1,1,1)-\frac{1}{2}(-1,1,0) \\ &= \frac{1}{6}\,(1,1,-2)\,, \end{aligned}$$

$$w_3=\frac{z_3}{\|z_3\|}=\frac{6}{\sqrt{6}}\frac{1}{6}\,(1,1,-2)=\frac{1}{\sqrt{6}}\,(1,1,-2)=\frac{\sqrt{6}}{6}\,(1,1,-2)\,.$$

Assim, conclui-se que a base ortonormada $\{w_1,w_2,w_3\}$ obtida a partir dos vetores e_1,e_2,e_3 é dada por

$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1),\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-1,1,0)\,,\frac{\sqrt{6}}{6}\,(1,1,-2)\right\}.$$

(b) Sejam $e_1=(1,0,0), e_2=(3,7,2), e_3=(0,4,1)$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, os vetores e_1,e_2,e_3 são linearmente independentes, e como $\dim(\mathbb{R}^3)=3$ é igual ao número de vetores, então $\{e_1,e_2,e_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Aplicando o método de Gram-Schmidt obtém-se:

$$w_1=\frac{e_1}{\|e_1\|}=\frac{(1,0,0)}{\|(1,0,0)\|}=(1,0,0);$$

$$z_2=e_2-w_1\,(e_2\cdot w_1)$$

$$
\begin{aligned}
&= (3,7,2) - (1,0,0)\ \left((3,7,2)\cdot(1,0,0)\right)\\
&= (3,7,2) - (3,0,0)\\
&= (0,7,2)\,,
\end{aligned}
$$

$$
w_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{1}{\sqrt{53}}\,(0,7,2)\,;
$$

$$
\begin{aligned}
z_3 &= e_3 - w_1\,(e_3\cdot w_1) - w_2\,(e_3\cdot w_2)\\
&= (0,4,1) - (1,0,0)\ \left((0,4,1)\cdot(1,0,0)\right)\\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{53}}\,(0,7,2)\ \left((0,4,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{53}}\,(0,7,2)\right)\\
&= (0,4,1) - 0 - \frac{30}{53}(0,7,2)\\
&= \frac{1}{53}\,(0,2,-7)\,,
\end{aligned}
$$

$$
w_3 = \frac{z_3}{\|z_3\|} = \frac{53}{\sqrt{53}}\frac{1}{53}\,(0,2,-7) = \frac{1}{\sqrt{53}}\,(0,2,-7)\,.
$$

Assim, conclui-se que a base ortonormada $\{w_1, w_2, w_3\}$ obtida a partir dos vetores e_1, e_2, e_3 é dada por

$$
\left\{(1,0,0), \frac{1}{53}\,(0,7,2)\,, \frac{1}{\sqrt{53}}\,(0,2,-7)\right\}.
$$

29. Sejam $W = \langle(1,2,1),(2,1,-1)\rangle$ e $v = (-1,1,2)$. Determine $\operatorname{proj}_W v$ e $\operatorname{proj}_{W^\perp} v$.

Como os vetores $(1,2,1), (2,1,-1)$ formam um conjunto gerador de W e são linearmente independentes (porque nenhum deles é combinação linear do outro, *i.e.* $\nexists k \in \mathbb{R}$: $(1,2,1) = k(2,1,-1)$), então $\{(1,2,1),(2,1,-1)\}$ é uma base de W.

Aplicando o método de Gram-Schmidt aos vetores da base, obtém-se

$$
w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{(1,2,1)}{\|(1,2,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1);
$$

$$
\begin{aligned}
z_2 &= e_2 - w_1\,(e_2\cdot w_1)\\
&= (2,1,-1) - \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)\ \left((2,1,-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)\right)\\
&= (2,1,-1) - \frac{1}{2}(1,2,1)\\
&= \frac{1}{2}\,(3,0,-3)\,,
\end{aligned}
$$

$$
w_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,0,-1)\,.
$$

Então,

$$
\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1), \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,0,-1)\right\}
$$

é uma base ortonormada de W.

Tem-se

$$
\operatorname{proj}_W v = (v\cdot w_1)w_1 + (v\cdot w_2)w_2
$$

$$\begin{aligned}
&= \left((-1,1,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)\right)\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)\\
&\quad+\left((-1,1,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)\\
&= \frac{1}{2}(1,2,1)-\frac{3}{2}(1,0,-1)\\
&= (-1,1,2)
\end{aligned}$$

e

$$\operatorname{proj}_{W^\perp} v = v - \operatorname{proj}_W v = (-1,1,2)-(-1,1,2) = (0,0,0).$$

30. Determine a projeção ortogonal de u no subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores v_1 e v_2.

(a) $u=(2,1,3)$, $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(1,2,1)$.

(b) $u=(1,-6,1)$, $v_1=(-1,2,1)$, $v_2=(2,2,4)$.

(a) Seja $W=\langle(1,1,0),(1,2,1)\rangle$. Como os vetores $(1,1,0),(1,2,1)$ formam um conjunto gerador de W e são linearmente independentes (porque nenhum deles é combinação linear do outro, *i.e.* $\nexists k\in\mathbb{R}:(1,1,0)=k(1,2,1)$), então $\{(1,1,0),(1,2,1)\}$ é uma base de W.

Aplicando o método de Gram-Schmidt aos vetores da base, obtém-se

$$w_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=\frac{(1,1,0)}{\|(1,1,0)\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0);$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= v_2 - w_1\,(v_2\cdot w_1)\\
&= (1,2,1)-\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\,\left((1,2,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)\\
&= (1,2,1)-\frac{3}{2}(1,1,0)\\
&= \frac{1}{2}(-1,1,2),
\end{aligned}$$

$$w_2=\frac{z_2}{\|z_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2).$$

Então,

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\right\}$$

é uma base ortonormada de W.

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_W u &= (u\cdot v_1)v_1+(u\cdot v_2)v_2\\
&= \left((2,1,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\\
&\quad+\left((2,1,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\right)\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\\
&= \frac{3}{2}(1,1,0)+\frac{5}{6}(-1,1,2)\\
&= \frac{1}{3}(2,7,5).
\end{aligned}$$

(b) Seja $W = \langle(-1,2,1),(2,2,4)\rangle$. Como os vetores $(-1,2,1),(2,2,4)$ formam um conjunto gerador de W e são linearmente independentes (porque nenhum deles é combinação linear do outro, *i.e.* $\nexists k \in \mathbb{R} : (-1,2,1) = k(2,2,4)$), então $\{(-1,2,1),(2,2,4)\}$ é uma base de W.

Aplicando o método de Gram-Schmidt aos vetores da base, obtém-se

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1,2,1)}{\|(-1,2,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1);$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= v_2 - w_1\,(v_2 \cdot w_1)\\
&= (2,2,4) - \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)\,\left((2,2,4)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)\right)\\
&= (2,2,4) - (-1,2,1)\\
&= (3,0,3)\,,
\end{aligned}$$

$$w_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,0,1)\,.$$

Então,

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1), \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,0,1)\right\}$$

é uma base ortonormada de W.

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_W u &= (u\cdot v_1)v_1 + (u\cdot v_2)v_2\\
&= \left((1,-6,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)\right)\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)\\
&\quad+\left((1,-6,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,0,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,0,1)\\
&= -2(-1,2,1) + (1,0,1)\\
&= (3,-4,-1).
\end{aligned}$$

31. Determine a decomposição QR das seguintes matrizes:

(a) $A = \left[\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{smallmatrix}\right]$.

(b) $B = \left[\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 1 & 4\end{smallmatrix}\right]$.

(c) $C = \left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right]$.

(d) $D = \left[\begin{smallmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{smallmatrix}\right]$.

(a) Aplicando o método de Gram-Schmidt aos vetores coluna

$$\{e_1, e_2\} = \{(1,2),(-1,3)\}$$

de A — que são linearmente independentes porque $\left|\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{smallmatrix}\right| = 5 \neq 0$ — para construir uma base ortonormada $\{q_1, q_2\}$, obtém-se

$$q_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2),$$

$$w_2 = e_2 - (e_2\cdot q_1)q_1$$

$$\begin{aligned}
&= (-1,3) - \left((-1,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)\right)\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) \\
&= (-2,1)\,, \\
q_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1).
\end{aligned}$$

Então, $A = QR$, onde

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

e

$$R = \begin{bmatrix} e_1\cdot q_1 & e_2\cdot q_1 \\ 0 & e_2\cdot q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{5}} & \frac{5}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

(b) Aplicando o método de Gram-Schmidt aos vetores coluna

$$\{e_1, e_2\} = \{(1,0,1),(2,1,4)\}$$

de A — que são linearmente independentes, porque porque nenhum deles é combinação linear do outro, *i.e.* $\nexists k \in \mathbb{R} : (1,0,1) = k(2,1,4)$ — para construir uma base ortonormada $\{q_1, q_2\}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \\
w_2 &= e_2 - (e_2\cdot q_1)q_1 \\
&= (2,1,4) - \left((2,1,4)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) \\
&= (-1,1,1)\,, \\
q_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1).
\end{aligned}$$

Então, $A = QR$, onde

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

e

$$R = \begin{bmatrix} e_1\cdot q_1 & e_2\cdot q_1 \\ 0 & e_2\cdot q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

(c) Aplicando o método de Gram-Schmidt aos vetores coluna

$$\{e_1, e_2\} = \{(1,-2,2),(1,1,1)\}$$

de A — que são linearmente independentes, porque porque nenhum deles é combinação linear do outro, *i.e.* $\nexists k \in \mathbb{R} : (1,-2,2) = k(1,1,1)$ — para construir uma base ortonormada $\{q_1, q_2\}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{3}(1,-2,2), \\
w_2 &= e_2 - (e_2\cdot q_1)q_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1,1,1) - \left((1,1,1)\cdot \frac{1}{3}(1,-2,2)\right)\frac{1}{3}(1,-2,2)\\
&= \frac{1}{9}\left(8,11,7\right),\\
q_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{26}}(8,11,7).
\end{aligned}
$$

Então, $A = QR$, onde

$$
Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{3\sqrt{26}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3\sqrt{26}} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3\sqrt{26}} \end{bmatrix}
$$

e

$$
R = \begin{bmatrix} e_1\cdot q_1 & e_2\cdot q_1 \\ 0 & e_2\cdot q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{26}}{3} \end{bmatrix}.
$$

(d) Aplicando o método de Gram-Schmidt aos vetores coluna

$$
\{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,0,1), (0,1,2), (2,1,0)\}
$$

de A — que são linearmente independentes porque $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$ — para construir uma base ortonormada $\{q_1, q_2, q_3\}$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\\
w_2 &= e_2 - (e_2\cdot q_1)q_1\\
&= (0,1,2) - \left((0,1,2)\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\\
&= \left(-1,1,1\right),\\
q_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1),\\
w_3 &= e_3 - (e_3\cdot q_2)q_2 - (e_3\cdot q_1)q_1\\
&= (2,1,0) - \left((2,1,0)\cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)\\
&\quad - \left((2,1,0)\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\\
&= (2,1,0) - (1,0,1) + \frac{1}{3}(-1,1,1)\\
&= \frac{1}{3}\left(2,4,-2\right),\\
q_3 &= \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(2,4,-2\right).
\end{aligned}
$$

Então, $A = QR$, onde

$$
Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}
$$

e

$$R = \begin{bmatrix} e_1 \cdot q_1 & e_2 \cdot q_1 & e_3 \cdot q_1 \\ 0 & e_2 \cdot q_2 & e_3 \cdot q_2 \\ 0 & 0 & e_3 \cdot q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

32. Seja (S) o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$.

    (a) Determine a sua solução de mínimos quadrados.

    (b) Determine a projeção ortogonal de b no espaço das colunas de A.

(a) Seja $x = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$. Tem-se

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix}$$

e

$$A^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Então o sistema normal associado $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$ é

$$\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema pelo Método de Gauss, vem

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & -3 & 1 \\ -3 & 21 & 10 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \frac{3}{14}\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 14 & -3 & 1 \\ 0 & \frac{285}{14} & \frac{143}{14} \end{array}\right].$$

Como $\mathrm{car}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{car}(A^{\mathrm{T}}A|A^{\mathrm{T}}b) = 2 = n$, onde n é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 14x_1 - 3x_2 = 1 \\ \frac{285}{14}x_2 = \frac{143}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{17}{95} \\ x_2 = \frac{143}{285}. \end{cases}$$

Logo, a solução de mínimos quadrados é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{95} \\ \frac{143}{285} \end{bmatrix}.$$

(b) A projeção ortogonal de b no espaço $\mathrm{EC}(A)$ é Ax, onde x é a solução de mínimos quadrados:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{17}{95} \\ \frac{143}{285} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{92}{285} \\ \frac{439}{285} \\ \frac{17}{95} \end{bmatrix}.$$

33. Determine o sistema normal associado a $Ax = b$ para os seguintes sistemas de equações lineares:

(a) $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ e cujo vetor dos termos independentes é $b = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Tem-se

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 25 \\ 25 & 35 \end{bmatrix}$$

e

$$A^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Então, o sistema normal associado $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$ é

$$\begin{bmatrix} 21 & 25 \\ 25 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

(b) Tem-se

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -1 & 5 \\ -1 & 22 & 30 \\ 5 & 30 & 45 \end{bmatrix}$$

e

$$A^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Então, o sistema normal associado $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$ é

$$\begin{bmatrix} 15 & -1 & 5 \\ -1 & 22 & 30 \\ 5 & 30 & 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

34. Determine a solução de mínimos quadrados dos seguintes sistemas de equações lineares $Ax = b$ e calcule a projeção ortogonal de b no espaço das colunas de A:

(a) $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(b) $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Seja $x = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$. Tem-se

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

e

$$A^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Então o sistema normal associado $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$ é

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema pelo Método de Gauss, vem

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 4 \\ 6 & 14 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A) = \operatorname{car}(A^{\mathrm{T}}A|A^{\mathrm{T}}b) = 2 = n$, onde n é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 4 \\ \qquad\quad 2x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Logo, a solução de mínimos quadrados é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

A projeção ortogonal de b no espaço $\mathrm{EC}(A)$ é Ax, onde x é a solução de mínimos quadrados:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{11}{6} \end{bmatrix}.$$

(b) Seja $x = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$. Tem-se

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

e

$$A^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Então o sistema normal associado $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$ é

$$\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Considerando a matriz amplicada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 14 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & -4 \end{array}\right],$$

tem-se $\text{car}(A^{\mathrm{T}}A) = \text{car}(A^{\mathrm{T}}A|A^{\mathrm{T}}b) = 2 = n$, onde n é o número de incógnitas, pelo que o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 14x_1 \qquad = 6 \\ \qquad 6x_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{7} \\ x_2 = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Logo, a solução de mínimos quadrados é dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

A projeção ortogonal de b no espaço $\text{EC}(A)$ é Ax, onde x é a solução de mínimos quadrados:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{46}{21} \\ -\frac{5}{21} \\ \frac{13}{21} \end{bmatrix}.$$

35. Determine a projeção ortogonal de $u = (1, -6, 1)$ no subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (-1, 2, 1)$ e $v_2 = (2, 2, 4)$ usando o Método dos mínimos quadrados.

Seja $W = \text{EC}(A) = \langle v_1, v_2 \rangle$. Então, $\text{proj}_W\, u = Ax$, onde $A = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ e $x = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$ é a solução de mínimos quadrados de $Ax = u$.

Tem-se

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 24 \end{bmatrix}$$

e

$$A^{\mathrm{T}}u = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Então, o sistema normal associado $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}u$ é

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo este sistema pelo Método de Gauss, vem

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & -12 \\ 6 & 24 & -6 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & -12 \\ 0 & 18 & 6 \end{array}\right]$$

Como $\text{car}(A^{\mathrm{T}}A) = \text{car}(A^{\mathrm{T}}A|A^{\mathrm{T}}u) = 2 = n$, onde n é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 6x_1 + \ 6x_2 = -12 \\ \qquad 18x_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{7}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Logo, $\text{proj}_W\, u = Ax = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} -\frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

36. Considere as seguintes observações que são resultados de uma experiência:

x	0	1	2	3
y	3	2	4	4

Suspeita-se que y seja uma função quadrática de x

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

onde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Determine a função quadrática usando o método de mínimos quadrados.

Considere o polinómio de segundo grau $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Substituindo os dados (x, y) na equação $y = f(x)$, obtém-se

$$\begin{cases} a_0 & = 3 \\ a_0 + a_1 + a_2 & = 2 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 & = 4 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 & = 4. \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito na forma matricial $Az = y$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $z = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$. Então, $A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix}$ e $A^{\mathrm{T}}y = \begin{bmatrix} 13 \\ 22 \\ 54 \end{bmatrix}$. Resolvendo o sistema normal $A^{\mathrm{T}}Az = A^{\mathrm{T}}y$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 22 \\ 54 \end{bmatrix}$$

pelo Método de Gauss, vem

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 14 & 13 \\ 6 & 14 & 36 & 22 \\ 14 & 36 & 98 & 54 \end{array}\right] \underset{\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \frac{3}{2}\ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - \frac{7}{2}\ell_1}}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 14 & 13 \\ 0 & 5 & 15 & \frac{5}{2} \\ 0 & 15 & 49 & \frac{17}{2} \end{array}\right] \underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 3\ell_2}{\longleftrightarrow}$$

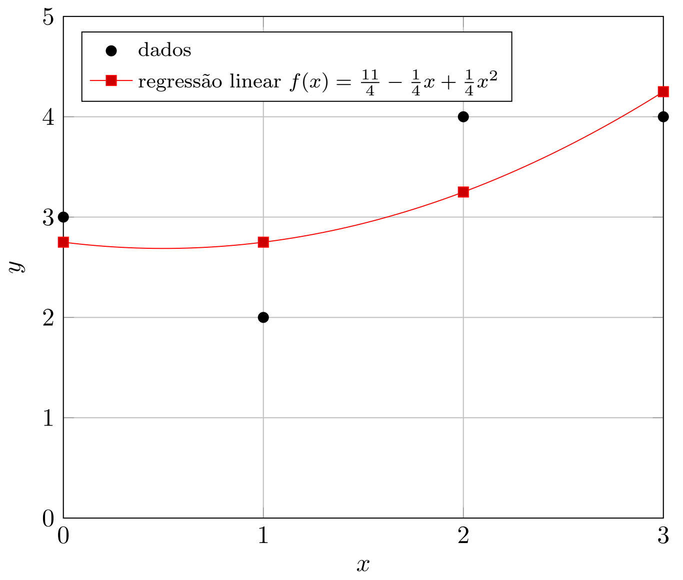
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 14 & 13 \\ 0 & 5 & 15 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

Como $\mathrm{car}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{car}(A^{\mathrm{T}}A|A^{\mathrm{T}}y) = 3 = n$, onde n é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 4a_0 + 6a_1 + 14a_2 = 13 \\ 5a_1 + 15a_2 = \frac{5}{2} \\ 4a_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{11}{4} \\ a_1 = -\frac{1}{4} \\ a_2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Então, o polinómio de regressão linear $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ fica definido por

$$f(x) = \frac{11}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 = 2.75 + 0.25x + 0.25x^2.$$



37. Determine a solução de mínimos quadrados do sistema de equações lineares $Ax = b$, sabendo que $A = QR$, com as matrizes Q, R e b dadas a seguir.

(a) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

(a) A solução de mínimos quadrados é a solução do sistema $Rx = Q^{\mathrm{T}}b$. Como

$$Q^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

então a matriz ampliada do sistema $Rx = Q^{\mathrm{T}}b$ é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Observa-se que $\operatorname{car}(R) = \operatorname{car}(Q^{\mathrm{T}}b) = 2 = n$, onde n é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \sqrt{2} \\ \qquad x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, a solução de mínimos quadrados é $x = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) A solução de mínimos quadrados é a solução do sistema $Rx = Q^{\mathrm{T}}b$. Como

$$Q^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

então a matriz ampliada do sistema $Rx = Q^{\mathrm{T}}b$ é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Observa-se que $\operatorname{car}(R) = \operatorname{car}(Q^{\mathrm{T}}b) = 2 = n$, onde n é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ \qquad x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Logo, a solução de mínimos quadrados é $x = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.

38. Sejam $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ e $b = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \\ 7 \end{smallmatrix}\right]$. Usando a decomposição QR, determine a solução de mínimos quadrados de $Ax = b$.

Como os vetores coluna $c_1 = (1, 1, 1, 1)$ e $c_2 = (-1, 4, -1, 4)$ de A são linearmente independentes, porque nenhum vetor é combinação linear do outro ($\nexists k \in \mathbb{R} : (1, 1, 1, 1) = k(-1, 4, -1, 4)$), então A admite uma única decomposição QR. Aplicando o Método de Gram-Schmidt a $\{c_1, c_2\}$ para construir uma base ortonormada $\{q_1, q_2\}$ obtém-se

$$q_1 = \frac{c_1}{\|c_1\|} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1),$$

$$\begin{aligned} w_2 &= c_2 - (c_2 \cdot q_1)q_1 = \\ &= (-1, 4, -1, 4) - \left((-1, 4, -1, 4) \cdot \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)\right) \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \\ &= \frac{5}{2}(-1, 1, -1, 1), \end{aligned}$$

$$q_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1).$$

Então $A = QR$, com

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} c_1 \cdot q_1 & c_2 \cdot q_1 \\ 0 & c_2 \cdot q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

A solução de mínimos quadrados é a solução do sistema $Rx = Q^{\mathrm{T}}b$. Como

$$Q^{\mathrm{T}}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{2} \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix},$$

então a matriz ampliada do sistema $Rx = Q^{\mathrm{T}}b$ é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & \frac{17}{2} \\ 0 & 5 & \frac{9}{2} \end{array}\right].$$

Observa-se que $\operatorname{car}(R) = \operatorname{car}(Q^{\mathrm{T}}b) = 2 = n$, onde n é o número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = \frac{17}{2} \\ \qquad\quad 5x_2 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{29}{10} \\ x_2 = \frac{9}{10}. \end{cases}$$

Logo, a solução de mínimos quadrados é $x = \begin{bmatrix} \frac{29}{10} \\ \frac{9}{10} \end{bmatrix}$.

Capítulo 2 Espaços afins

2.1 Exercícios

1. Considere o espaço afim $\mathbb{R}^3$ associado ao espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Mostre que o conjunto $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 5\}$ é um subespaço afim de $\mathbb{R}^3$, associado ao subespaço vetorial $H = \langle(1, 0, -1), (0, 1, -1)\rangle$.
2. Considere no espaço afim $\mathbb{R}^3$, o conjunto $\mathcal{F} = \{(1 + x, 1, 1 + x) : x \in \mathbb{R}\}$. Mostre que $\mathcal{F}$ é um subespaço afim de $\mathbb{R}^3$, associado ao subespaço vetorial $F = \langle(1, 0, 1)\rangle$.
3. Considere no espaço afim $\mathbb{R}^4$ o conjunto $\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 - x_4 + 1\}$. Verifique que $\mathcal{F}$ constitui um subespaço afim de $\mathbb{R}^4$ associado ao subespaço vetorial $F = \langle(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\rangle$.
4. Determine a equação vetorial, as equações paramétricas e as equações cartesianas da reta que passa pelo ponto $P = (1, 1, 1)$ e tem a direção do vetor $u = (1, 0, 2)$.
5. Determine a equação vetorial, as equações paramétricas e as equações cartesianas da reta que passa pelos pontos $A = (2, 0, 1)$ e $B = (-1, 2, -1)$.
6. Determine a equação vetorial, as equações paramétricas e as equações cartesianas da reta que passa pelos pontos $A = (2, 4, 0)$ e $B = (3, 7, 1)$.
7. Determine a equação vetorial, as equações paramétricas e as equações cartesianas da reta que passa pelos pontos $A = (1, -1, 0)$ e $B = (1, 0, 3)$.
8. Considere a reta $\mathcal{R}$ representada pelo sistema de equações
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$
Determine uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$.
9. Considere a reta $\mathcal{R}$ representada pelo sistema de equações
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 2. \end{cases}$$
Determine uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$.
10. Sejam $u = (-1, 1, 2)$, $v = (0, -1, 2)$ e $w = (2, -1, -3)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Calcule as seguintes expressões:
    (a) $u \times v$.
    (b) $v \times w$.
    (c) $u \times w$.
    (d) $(u \cdot v) \times w$.
    (e) $u \times (v \cdot w)$.
    (f) $(u + v) \times w$.

11. Considere em $\mathbb{R}^3$ uma base ortonormada $\{e_1, e_2, e_3\}$. Sejam $u = e_1 - e_2 + e_3$, $v = e_2 + 2e_3$ e $w = e_1 + e_2$. Calcule as seguintes expressões:

    (a) $u \times v$.

    (b) $v \times w$.

    (c) $(u \times v) \times w$.

    (d) $u \times (v \times w)$.

    (e) um vetor ortogonal a u e v com norma $\sqrt{15}$.

12. Determine uma equação vetorial, equações paramétricas e uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$.

13. Determine uma equação vetorial, equações paramétricas e uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos $A = (2, 1, -1)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 0, 1)$.

14. Determine uma equação vetorial, equações paramétricas e uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos $A = (1, -1, 2)$, $B = (2, 1, -1)$, $C = (1, 1, 5)$.

15. Considere o plano $\mathcal{P}$ representado pela equação $x + 2y - z = 4$. Determine por dois processos distintos uma equação vetorial de $\mathcal{P}$.

16. Considere o plano $\mathcal{P}$ representado pela equação $x + 5z = 2$. Determine uma equação vetorial de $\mathcal{P}$.

17. Considere o plano $\mathcal{P}$ representado pela equação $z = x - 2y$. Determine por dois processos distintos uma equação vetorial de $\mathcal{P}$.

18. Seja $\mathcal{P}$ o plano que passa pelo ponto $P = (2, 2, 1)$ e contém a reta $\mathcal{R}$ representada pelo seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

    Determine:

    (a) Uma equação vetorial e uma equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$.

    (b) As equações cartesianas da reta $\mathcal{S}$ que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano $\mathcal{P}$.

    (c) Uma equação vetorial do plano $\mathcal{T}$ que passa pela origem do sistema de eixos e contém a reta $\mathcal{S}$.

19. Considere a reta $\mathcal{R}$ definida pelas seguintes equações cartesianas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z.$$

    (a) Determine uma equação vetorial do plano $\mathcal{P}$ que passa pelo ponto $P = (1, 2, 0)$ e é perpendicular à reta $\mathcal{R}$.

    (b) Verifique se a reta $\mathcal{S}$ que passa pelo ponto $A = (0, 0, 8)$ e tem a direção do vetor $u = (1, -1, 1,)$ está contida no plano $\mathcal{P}$.

20. Seja $\mathcal{P}$ o plano definido pelos pontos $A = (2, 1, -1)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 0, 1)$. Determine um sistema de equações paramétricas e as equações cartesianas da reta $\mathcal{R}$

perpendicular ao plano $\mathcal{P}$ e que passa pelo ponto B.

21. Escreva equações vetoriais das retas em $\mathbb{R}^3$ que são formadas pelos pontos (x, y, z) que satisfazem as seguintes condições:
    (a) $x = 0$, $y = 3z$.
    (b) $y = -\frac{1}{2}z$, $z = -4$.
22. Verifique se a reta $\mathcal{R} = (3, 1, 2) + \langle(1, 1, 0)\rangle$ e o plano $\mathcal{P} = (2, 1, -1) + \langle(1, -1, 1), (2, 0, 1)\rangle$ são paralelos.
23. Verifique se a reta $\mathcal{R} = (3, 1, 2) + \langle(1, 1, 0)\rangle$ e a reta $\mathcal{S}$ dada pela equação vetorial $(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(1, 1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ são paralelas.
24. Considere os planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ definidos pelas equações vetoriais

$$(x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 0, 1),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

e

$$(x, y, z) = (2, 4, -3) + \lambda(3, 1, 3) + \mu(0, 1, 0),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

respetivamente. Verifique se os planos são paralelos.

25. Considere o plano $\mathcal{P}$ definido pelos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 2)$, $C = (0, 2, 1)$. Determine a equação cartesiana do plano $\mathcal{Q}$ paralelo a $\mathcal{P}$ contendo a origem do sistema de eixos e a equação cartesiana do plano $\mathcal{T}$ paralelo a $\mathcal{P}$, que passa pelo ponto $P = (-1, 0, -2)$.
26. Considere a reta $\mathcal{R}$ definida pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x = y + 3 \\ z = -y + 1 \end{cases}$$

e o plano $\mathcal{P}$ dado por $2x - 3y + 4z = 5$. Verifique se $\mathcal{R} \parallel \mathcal{P}$.

27. Considere, no espaço $\mathbb{R}^3$, os pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (0, 2, 0)$ e $D = (1, 2, 1)$. Determine:
    (a) a reta r definida pelos pontos A e B;
    (b) a reta s que contém o ponto C e que é paralela à reta r;
    (c) o plano α definido pelas retas r e s;
    (d) o plano β definido pela reta r e pelo ponto D;
    (e) o ponto de intersecção da reta r com o plano α.
28. Seja $\mathcal{T}$ o plano perpendicular ao vetor $w = (1, 1, -1)$ e que passa pelo ponto $A = (0, 0, -3)$. Seja $P = (1, -1, 0)$ um ponto de $\mathbb{R}^3$. Determine a distância de P ao plano $\mathcal{T}$.
29. Determine a distância entre o ponto $P = (0, 1, -2)$ e o plano α cuja equação cartesiana é $x + y + z = 1$.
30. Considere o plano $\mathcal{T}$ definido pela equação vetorial $(x, y, z) = (2, 0, 0) + \lambda(-2, 1, 0) + \mu(2, 0, -1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e a reta $\mathcal{R}$ definida pelas equações

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ z = -y - 1. \end{cases}$$

Calcule as coordenadas dos pontos da reta $\mathcal{R}$ que distam uma unidade do plano $\mathcal{T}$.

31. Seja $\mathcal{T}$ o plano paralelo ao plano $\mathcal{T}'$ de equação $2x - y + 3z = 10$ e que passa pelo ponto $Q = (2,3,4)$. Seja $P = (3,4,5) \in \mathbb{R}^3$. Determine a distância do ponto P ao plano $\mathcal{T}$.
32. Seja $\mathcal{R}$ a reta definida pela equação vetorial $(x,y,z) = (2,1,2) + \lambda(1,2,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $P = (2,3,3)$ um ponto de $\mathbb{R}^3$. Determine a distância de P à reta $\mathcal{R}$.
33. Considere a reta $\mathcal{R}$ definida pelo sistema de equações
$$\begin{cases} x + \ \ y - \ \ z = 4 \\ x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$
e o ponto $P = (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Determine a distância de P à reta $\mathcal{R}$.
34. Considere os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ definidos pelas equações $2x - y + 3z - 1 = 0$ e $3x + 2y + 5z + 2 = 0$, respetivamente. Determine a distância entre os dois planos.
35. Sejam $\mathcal{P}$ o plano definido pela equação
$$(x,y,z) = (1,1,-1) + \lambda(0,1,-1) + \mu(4,-1,-1), \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$
e $\mathcal{T}$ o plano definido por $x + \alpha y + 2z + \beta = 0$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Determine os valores de α e β para que os dois planos distam três unidades.
36. Sejam $\mathcal{R}$ a reta definida pela equação vetorial
$$(x,y,z) = (2,4,6) + \lambda(2,-1,3), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
e $\mathcal{P}$ o plano definido por $2x - y + 3z = 2$. Determine a distância da reta ao plano.
37. Considere o plano $\mathcal{P}$ de equação $x - y + z = 1$ e $\mathcal{R}$ a reta definida pelo sistema
$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = -y + 3. \end{cases}$$
Determine a distância entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{P}$.
38. Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ as retas definidas pelos sistemas
$$\begin{cases} y = \beta x - \beta \\ z = -2x + 4 \end{cases}$$
e
$$\begin{cases} y = x - 1 \\ z = -2x + 2 + \beta \end{cases},$$
respetivamente. Determine a distância entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ em função do parâmetro β supondo que:
    (a) $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são concorrentes.
    (b) $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são paralelas.
39. Considere a reta $\mathcal{R}$ que passa pelo ponto $A = (3,1,2)$ e tem a direção do vetor $u = (1,1,0)$, o plano $\mathcal{P}$ definido pela equação $2x + y - z = -9$, e o ponto $Q = (4,3,3)$. Determine:
    (a) o ângulo entre a reta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}$.
    (b) o ângulo entre o plano $\mathcal{P}$ e o plano $\mathcal{Q}$ que contém a reta $\mathcal{R}$ e passa pelo ponto Q.

(c) o ângulo entre a reta $\mathcal{R}$ e a reta $\mathcal{S}$ que passa pelos pontos A e Q.

40. Considere o plano $\mathcal{P}$ definido por $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 2, 1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, e o plano $\mathcal{Q}$ definido pelos pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (0, 0, 0)$. Determine o ângulo entre os dois planos.

41. Sejam $A = (1, 2, -2)$, $\mathcal{R}$ a reta de equação $(x, y, z) = (2, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1)$ e $\mathcal{P}$ o plano de equação $x + 3y + 4z = 0$. Determine:

    (a) o ângulo entre a reta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}$.

    (b) a equação cartesiana do plano $\mathcal{Q}$ paralelo a $\mathcal{P}$ que passa por A.

    (c) a distância entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

    (d) a distância entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{P}$.

42. Considere as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ definidas pelas equações $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(4, 0, -3), \ \lambda \in \mathbb{R}$, e

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{4},$$

respetivamente. Determine o ângulo entre as duas retas.

43. Considere, no espaço $\mathbb{R}^3$, o plano $\alpha : x + 2y = 3$, o plano $\beta : x + y - z = 0$, a reta r definida pelos pontos $A = (1, 2, 3)$ e $B = (1, 0, 1)$ e a reta s definida pelas equações $x + y - z = 4$ e $x + 2y - 3z = 4$. Determine:

    (a) $\angle(r, s)$.

    (b) $\angle(\alpha, r)$.

    (c) $\angle(\alpha, \beta)$.

    (d) A reta t que contém o ponto A e que é perpendicular ao plano α.

    (e) $d(A, \alpha)$.

    (f) $d(B, s)$.

    (g) O plano que contém a reta r e que é perpendicular ao plano α.

44. Seja $\mathcal{R}$ a reta definida pelo sistema de equações

$$\begin{cases} 2x - 2 = y - 1 \\ \alpha x - \alpha = z. \end{cases}$$

Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais $\mathcal{R}$ é paralela ao plano $\mathcal{P}$ de equação $2x + 4y + z = -5$ e calcule a distância de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{P}$.

45. Sejam $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{O}$ os planos definidos pelas equações $-2x + 4y - 2z = -3$, $x + 2z = 1$, e $2x + 4y + 6z = -2$, respetivamente.

    (a) Determine o ângulo entre os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

    (b) Determine a reta $\mathcal{R}$ que está contida simultaneamente nos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

    (c) Calcule a distância da reta $\mathcal{R}$ ao plano $\mathcal{O}$.

46. Considere as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ definidas pelas equações $(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(0, 1, -2), \ \lambda \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) = (2, 0, 1) + \mu(0, 2, 1), \ \mu \in \mathbb{R}$ respetivamente. Determine:

    (a) a distância entre as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

(b) a equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$ que contém a reta $\mathcal{R}$ e é paralelo à reta $\mathcal{S}$.

(c) a distância entre a reta $\mathcal{S}$ e o plano $\mathcal{P}$.

2.2 Resoluções

1. Considere o espaço afim $\mathbb{R}^3$ associado ao espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Mostre que o conjunto $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 5\}$ é um subespaço afim de $\mathbb{R}^3$, associado ao subespaço vetorial $H = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$.

   $\mathcal{H}$ é um subespaço afim de $\mathbb{R}^3$, associado ao subespaço vetorial H, se as duas condições da definição de subespaço afim são válidas.

   - Condição (i): $\forall A, B \in \mathcal{H}\ [v_{AB} \in H]$.

     Sejam $A = (x, y, 5 - x - y), B = (z, w, 5 - z - w) \in \mathcal{H}$. Então,

     $$\begin{aligned} v_{AB} &= B - A \\ &= (z - x, w - y, 5 - z - w - (5 - x - y)) \\ &= (z - x, w - y, -(z - x) - (w - y)) \\ &= (z - x)(1, 0, -1) + (w - y)(0, 1, -1) \in H. \end{aligned}$$

     Assim, conclui-se que a condição (i) é válida.

   - Condição (ii): $\forall A \in \mathcal{H}, \forall v \in H\ [A + v \in \mathcal{H}]$.

     Sejam $A = (x, y, 5 - x - y) \in \mathcal{H}$ e $v = (\alpha, \beta, -\alpha - \beta) \in H$. Então,

     $$\begin{aligned} A + v &= (x, y, 5 - x - y) + (\alpha, \beta, -\alpha - \beta) \\ &= (x + \alpha, y + \beta, 5 - x - y - \alpha - \beta) \\ &= (x + \alpha, y + \beta, 5 - (x + \alpha) - (y + \beta)) \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

     Assim, conclui-se que a condição (ii) é válida.

   Como as condições (i) e (ii) são válidas, conclui-se que $\mathcal{H}$ é um subespaço afim associado ao subespaço vetorial H.

2. Considere no espaço afim $\mathbb{R}^3$, o conjunto $\mathcal{F} = \{(1 + x, 1, 1 + x) : x \in \mathbb{R}\}$. Mostre que $\mathcal{F}$ é um subespaço afim de $\mathbb{R}^3$, associado ao subespaço vetorial $F = \langle (1, 0, 1) \rangle$.

   $\mathcal{F}$ é um subespaço afim de $\mathbb{R}^3$, associado ao subespaço vetorial F, se as duas condições da definição de subespaço afim são válidas.

   - Condição (i): $\forall A, B \in \mathcal{F}\ [v_{AB} \in F]$.

     Sejam $A = (1 + x, 1, 1 + x), B = (1 + y, 1, 1 + y) \in \mathcal{F}$. Então,

     $$\begin{aligned} v_{AB} &= B - A \\ &= (y - x, 0, y - x) \\ &= (y - x)(1, 0, 1) \in F. \end{aligned}$$

     Assim, conclui-se que a condição (i) é válida.

   - Condição (ii): $\forall A \in \mathcal{F}, \forall v \in F\ [A + v \in \mathcal{F}]$.

     Sejam $A = (1 + x, 1, 1 + x) \in \mathcal{F}$ e $v = (\alpha, 0, \alpha) \in F$. Então,

     $$A + v = (1 + x, 1, 1 + x) + (\alpha, 0, \alpha)$$

$$= (1 + x + \alpha, 1, 1 + x + \alpha)$$
$$= (1 + \bar{x}, 1, 1 + \bar{x}) \in \mathcal{F},$$

onde $\bar{x} = x + \alpha$. Assim, conclui-se que a condição (ii) é válida.

Como as condições (i) e (ii) são válidas, conclui-se que $\mathcal{F}$ é um subespaço afim associado ao subespaço vetorial F.

3. Considere no espaço afim $\mathbb{R}^4$ o conjunto $\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 - x_4 + 1\}$. Verifique que $\mathcal{F}$ constitui um subespaço afim de $\mathbb{R}^4$ associado ao subespaço vetorial $F = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$.

$\mathcal{F}$ é um subespaço afim de $\mathbb{R}^3$, associado ao subespaço vetorial F, se as duas condições da definição de subespaço afim são válidas.

- Condição (i): $\forall A, B \in \mathcal{F}\ [v_{AB} \in F]$.

Sejam $A = (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_4 - 1, x_4), B = (y_1, y_2, y_1 + y_2 + y_4 - 1, y_4) \in \mathcal{F}$. Então,

$$\begin{aligned} v_{AB} &= B - A \\ &= (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_1 + y_2 + y_4 - 1 - x_1 - x_2 - x_4 + 1, y_4 - x_4) \\ &= (y_1 - x_1)(1, 0, 1, 0) + (y_2 - x_2)(0, 1, 1, 0) + (y_4 - x_4)(0, 0, 1, 1) \in F. \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que a condição (i) é válida.

- Condição (ii): $\forall A \in \mathcal{F}, \forall v \in F\ [A + v \in \mathcal{F}]$.

Sejam $A = (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_4 - 1, x_4) \in \mathcal{F}$ e $v = (\alpha, \beta, \alpha + \beta + \gamma, \gamma) \in F$. Então,

$$\begin{aligned} A + v &= (x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_4 - 1, x_4) + (\alpha, \beta, \alpha + \beta + \gamma, \gamma) \\ &= (x_1 + \alpha, x_2 + \beta, x_1 + x_2 + x_4 - 1 + \alpha + \beta + \gamma, x_4 + \gamma) \\ &= (\bar{x_1}, \bar{x_2}, \bar{x_1} + \bar{x_2} + \bar{x_4} - 1, \bar{x_4}) \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

onde $\bar{x}_1 = x_1 + \alpha$, $\bar{x}_2 = x_2 + \beta$ e $\bar{x}_4 = x_4 + \gamma$. Assim, conclui-se que a condição (ii) é válida.

Como as condições (i) e (ii) são válidas, conclui-se que $\mathcal{F}$ é um subespaço afim associado ao subespaço vetorial F.

4. Determine a equação vetorial, as equações paramétricas e as equações cartesianas da reta que passa pelo ponto $P = (1, 1, 1)$ e tem a direção do vetor $u = (1, 0, 2)$.

A equação vetorial da reta é

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \alpha(1, 0, 2), \alpha \in \mathbb{R},$$

podendo-se escrever

$$\mathcal{R} = (1, 1, 1) + \langle (1, 0, 2) \rangle.$$

Da equação vetorial obtém-se as equações paramétricas:

$$x = 1 + \alpha,\ y = 1,\ z = 1 + 2\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Eliminando o parâmetro α das equações paramétricas, obtém-se as equações cartesianas:

$$x - 1 = \frac{z-1}{2} \wedge y = 1 \Leftrightarrow 2x - z = 1 \wedge y = 1.$$

5. Determine a equação vetorial, as equações paramétricas e as equações cartesianas da reta que passa pelos pontos $A = (2, 0, 1)$ e $B = (-1, 2, -1)$.

   A equação vetorial da reta que tem $v_{AB} = B - A = (-3, 2, -2)$ como vetor diretor é

   $$(x, y, z) = (2, 0, 1) + \alpha(-3, 2, -2), \alpha \in \mathbb{R},$$

   podendo-se escrever

   $$\mathcal{R} = (2, 0, 1) + \langle(-3, 2, -2)\rangle.$$

   Da equação vetorial obtém-se as equações paramétricas:

   $$x = 2 - 3\alpha,\ y = 2\alpha,\ z = 1 - 2\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Eliminando o parâmetro α das equações paramétricas, obtém-se as equações cartesianas:

   $$\frac{x-2}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

6. Determine a equação vetorial, as equações paramétricas e as equações cartesianas da reta que passa pelos pontos $A = (2, 4, 0)$ e $B = (3, 7, 1)$.

   A equação vetorial da reta que tem $v_{AB} = B - A = (1, 3, 1)$ como vetor diretor é

   $$(x, y, z) = (2, 4, 0) + \alpha(1, 3, 1), \alpha \in \mathbb{R},$$

   podendo-se escrever

   $$\mathcal{R} = (2, 4, 0) + \langle(1, 3, 1)\rangle.$$

   Da equação vetorial obtém-se as equações paramétricas:

   $$x = 2 + \alpha,\ y = 4 + 3\alpha,\ z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Eliminando o parâmetro α das equações paramétricas, obtém-se as equações cartesianas:

   $$x - 2 = \frac{y-4}{3} = z.$$

7. Determine a equação vetorial, as equações paramétricas e as equações cartesianas da reta que passa pelos pontos $A = (1, -1, 0)$ e $B = (1, 0, 3)$.

   A equação vetorial da reta que tem $v_{AB} = B - A = (0, 1, 3)$ como vetor diretor é

   $$(x, y, z) = (1, -1, 0) + \alpha(0, 1, 3), \alpha \in \mathbb{R},$$

   podendo-se escrever

   $$\mathcal{R} = (1, -1, 0) + \langle(0, 1, 3)\rangle.$$

   Da equação vetorial obtém-se as equações paramétricas:

   $$x = 1,\ y = -1 + \alpha,\ z = 3\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Eliminando o parâmetro α das equações paramétricas, obtém-se as equações cartesianas:

   $$x = 1 \wedge y + 1 = \frac{z}{3}.$$

8. Considere a reta $\mathcal{R}$ representada pelo sistema de equações
$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x-y+z=0. \end{cases}$$
Determine uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$.

Seja $Ax=b$ o sistema de equações lineares que representa a reta $\mathcal{R}$. Então, tem-se
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right].$$
Como $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|b) = 2 < n = 3$, onde n é o número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado, sendo z uma incógnita livre. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares
$$\begin{cases} x+\ \ y-\ \ z=2 \\ \ \ -2y+2z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1+z. \end{cases}$$
Logo, a equação vetorial da reta é
$$(x,y,z)=(1,1,0)+\alpha(0,1,1), \alpha \in \mathbb{R},$$

9. Considere a reta $\mathcal{R}$ representada pelo sistema de equações
$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=2. \end{cases}$$
Determine uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$.

Seja $Ax=b$ o sistema de equações lineares que representa a reta $\mathcal{R}$. Então, tem-se
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right].$$
Como $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A|b) = 2 < n = 3$, onde n é o número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado, sendo z uma incógnita livre. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares
$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=0 \\ \ \ -2y-2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1-z. \end{cases}$$
Logo, a equação vetorial da reta é
$$(x,y,z)=(1,-1,0)+\alpha(0,-1,1), \alpha \in \mathbb{R},$$

10. Sejam $u=(-1,1,2)$, $v=(0,-1,2)$ e $w=(2,-1,-3)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Calcule as seguintes expressões:
(a) $u \times v$.
(b) $v \times w$.
(c) $u \times w$.
(d) $(u \cdot v) \times w$.
(e) $u \times (v \cdot w)$.
(f) $(u+v) \times w$.

(a)

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2e_1 + e_3 + 2e_1 + 2e_2 = (4, 2, 1).$$

(b)

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3e_1 + 4e_2 + 2e_3 + 2e_1 = (5, 4, 2).$$

(c)

$$u \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -3e_1 + 4e_2 + e_3 - 2e_3 + 2e_1 - 3e_2 = (-1, 1, -1).$$

(d) Como $u \cdot v$ é um escalar, então o produto vetorial $(u \cdot v) \times w$ não está definido.

(e) Como $v \cdot w$ é um escalar, então o produto vetorial $u \times (v \cdot w)$ não está definido.

(f) Tem-se $u + v = (-1, 0, 4)$ e, assim,

$$(u + v) \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 8e_2 + e_3 + 4e_1 - 3e_2 = (-4, 5, 1).$$

11. Considere em $\mathbb{R}^3$ uma base ortonormada $\{e_1, e_2, e_3\}$. Sejam $u = e_1 - e_2 + e_3$, $v = e_2 + 2e_3$ e $w = e_1 + e_2$. Calcule as seguintes expressões:

(a) $u \times v$.

(b) $v \times w$.

(c) $(u \times v) \times w$.

(d) $u \times (v \times w)$.

(e) um vetor ortogonal a u e v com norma $\sqrt{15}$.

(a)

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2e_1 + e_3 - e_1 - 2e_2 = (-3, -2, 1).$$

(b)

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2e_2 - e_3 - 2e_1 = (-2, 2, -1).$$

(c)

$$(u \times v) \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = e_2 - e_3 + 2e_3 - e_1 = (-1, 1, 1).$$

(d)

$$u\times(v\times w)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=e_1-2e_2+2e_3-2e_3-2e_1+e_2=(-1,-1,0).$$

(e) Como $u\times v$ é ortogonal a u e v, então pretende-se determinar $n=k(u\times v)$, onde $k\in\mathbb{R}$ é tal que $\|n\|=\sqrt{15}$.

Calculando o produto vetorial, obtém-se

$$u\times v=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-2e_1+e_3-e_1-2e_2=(-3,-2,1),$$

então $n=k(-3,-2,1)$ e

$$\|n\|=\sqrt{15}\Leftrightarrow\sqrt{k^2(9+4+1)}=\sqrt{15}\Leftrightarrow|k|=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}.$$

Daqui obtém-se $k=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}\vee k=-\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}$ e, assim, o vetor que tem as propriedades pretendidas é $n=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}(-3,-2,1)$, para $k=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}$, ou $n=-\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}(-3,-2,1)$, para $k=-\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}$.

12. Determine uma equação vetorial, equações paramétricas e uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos $A=(1,1,1)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$.

Usando $v_{AB}=B-A=(-1,0,-1)$ e $v_{AC}=C-A=(-1,-1,0)$, então

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=A+\lambda v_{AB}+\mu v_{AC}\\ &=(1,1,1)+\lambda(-1,0,-1)+\mu(-1,-1,0),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

é uma equação vetorial do plano $\mathcal{P}$. A partir da equação vetorial obtém-se as seguintes equações paramétricas

$$\begin{cases} x=1-\lambda-\mu \\ y=1-\mu \\ z=1-\lambda, \end{cases}$$

onde $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. O vetor

$$\begin{aligned} n&=v_{AB}\times v_{AC}\\ &=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}\\ &=e_2+e_3-e_1\\ &=(-1,1,1)\end{aligned}$$

é perpendicular a $\mathcal{P}$. Seja $P=(x,y,z)\in\mathcal{P}$. Então, obtém-se

$$\begin{aligned} v_{AP}\cdot n=0&\Leftrightarrow(P-A)\cdot n=0\\ &\Leftrightarrow(x-1,y-1,z-1)\cdot(-1,1,1)=0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -x+1+y-1+z-1=0$$
$$\Leftrightarrow -x+y+z=1,$$

donde se conclui que $-x+y+z=1$ é uma equação cartesiana de $\mathcal{P}$.

13. Determine uma equação vetorial, equações paramétricas e uma equação cartesiana do plano definido pelos pontos $A=(2,1,-1)$, $B=(0,1,0)$, $C=(1,0,1)$.

Usando $v_{AB}=B-A=(-2,0,1)$ e $v_{AC}=C-A=(-1,-1,2)$, então

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=A+\lambda v_{AB}+\mu v_{AC}\\&=(2,1,-1)+\lambda(-2,0,1)+\mu(-1,-1,2),\ \ \lambda,\mu\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

é uma equação vetorial do plano $\mathcal{P}$. A partir da equação vetorial obtém-se as seguintes equações paramétricas

$$\begin{cases}x=2-2\lambda-\mu\\ y=1-\mu\\ z=1+\lambda+2\mu,\end{cases}$$

onde $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. O vetor

$$\begin{aligned}n&=v_{AB}\times v_{AC}\\&=\begin{vmatrix}e_1&e_2&e_3\\-2&0&1\\-1&-1&2\end{vmatrix}\\&=-e_2+2e_3+e_1+4e_2\\&=(1,3,2)\end{aligned}$$

é perpendicular a $\mathcal{P}$. Seja $P=(x,y,z)\in\mathcal{P}$. Então, obtém-se

$$\begin{aligned}v_{AP}\cdot n=0&\Leftrightarrow(P-A)\cdot n=0\\&\Leftrightarrow(x-2,y-1,z+1)\cdot(1,3,2)=0\\&\Leftrightarrow x-2+3y-3+2z+2=0\\&\Leftrightarrow x+3y+2z=3,\end{aligned}$$

donde se conclui que $x+3y+2z=3$ é uma equação cartesiana de $\mathcal{P}$.

14. Considere o plano $\mathcal{P}$ representado pela equação $x+2y-z=4$. Determine por dois processos distintos uma equação vetorial de $\mathcal{P}$.

- Processo 1:

  O plano $\mathcal{P}$ pode ser representado da seguinte forma

  $$\begin{aligned}\mathcal{P}&=\{(x,y,x+2y-4):x,y\in\mathbb{R}\}\\&=\{x(1,0,1)+y(0,1,2)+(0,0,-4):x,y\in\mathbb{R}\}\\&=(0,0,-4)+\langle(1,0,1),(0,1,2)\rangle,\end{aligned}$$

logo, uma equação vetorial de $\mathcal{P}$ é

$$(x,y,z) = (0,0,-4) + \lambda(1,0,1) + \mu(0,1,2),\ \ \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

- Processo 2:

  Escolhendo três pontos do plano $\mathcal{P}$, por exemplo,

  $$A = (4,0,0),\ \ B = (0,2,0),\ \ C = (0,0,-4) \in \mathcal{P},$$

  tem-se $v_{AB} = B - A = (-4,2,0)$ e $v_{AC} = C - A = (-4,0,-4)$, e, assim,

  $$(x,y,z) = (4,0,0) + \lambda(-4,2,0) + \mu(-4,0,4),\ \ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

  é uma equação vetorial de $\mathcal{P}$.

15. Considere o plano $\mathcal{P}$ representado pela equação $x + 5z = 2$. Determine uma equação vetorial de $\mathcal{P}$.

    O plano $\mathcal{P}$ pode ser representado da seguinte forma

    $$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{(2-5z,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(0,1,0) + z(-5,0,1) + (2,0,0) : y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= (2,0,0) + \langle (0,1,0), (-5,0,1) \rangle, \end{aligned}$$

    logo, uma equação vetorial de $\mathcal{P}$ é

    $$(x,y,z) = (2,0,0) + \lambda(0,1,0) + \mu(-5,0,1),\ \ \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

16. Considere o plano $\mathcal{P}$ representado pela equação $z = x - 2y$. Determine por dois processos distintos uma equação vetorial de $\mathcal{P}$.

- Processo 1:

  O plano $\mathcal{P}$ pode ser representado da seguinte forma

  $$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{(x,y,x-2y) : x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,1) + y(0,1,-2) + (0,0,0) : x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= (0,0,0) + \langle (1,0,1), (0,1,-2) \rangle, \end{aligned}$$

  logo, uma equação vetorial de $\mathcal{P}$ é

  $$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(1,0,1) + \mu(0,1,-2),\ \ \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

- Processo 2:

  Escolhendo três pontos do plano $\mathcal{P}$, por exemplo,

  $$A = (0,0,0),\ \ B = (2,1,0),\ \ C = (1,0,1) \in \mathcal{P},$$

  tem-se $v_{AB} = B - A = (2,1,0)$ e $v_{AC} = C - A = (1,0,1)$, e, assim,

  $$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(2,1,0) + \mu(1,0,1),\ \ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

  é uma equação vetorial de $\mathcal{P}$.

17. Seja $\mathcal{P}$ o plano que passa pelo ponto $P = (2, 2, 1)$ e contém a reta $\mathcal{R}$ representada pelo seguinte sistema de equações
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$
Determine:

(a) Uma equação vetorial e uma equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$.

(b) As equações cartesianas da reta $\mathcal{S}$ que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano $\mathcal{P}$.

(c) Uma equação vetorial do plano $\mathcal{T}$ que passa pela origem do sistema de eixos e contém a reta $\mathcal{S}$.

(a) Seja $Ax = b$ o sistema de equações lineares que representa a reta $\mathcal{R}$. Então, tem-se
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right].$$
Como $\text{car}(A) = \text{car}(A|b) = 2 < n = 3$, onde n é o número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado, sendo z uma incógnita livre. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares
$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ - 2y + 2z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + z. \end{cases}$$
Então, a equação vetorial da reta é dada por
$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + \alpha(0, 1, 1), \alpha \in \mathbb{R},$$
Considere dois pontos da reta, por exemplo $A = (1, 1, 0)$, que corresponde a $\alpha = 0$, e $B = (1, 2, 1)$, que corresponde a $\alpha = 1$. Como $v_{PA} = A - P = (-1, -1, -1)$ e $v_{PB} = B - P = (-1, 0, 0)$ são dois vetores diretores do plano $\mathcal{P}$, então
$$(x, y, z) = (2, 2, 1) + \lambda(-1, -1, -1) + \mu(-1, 0, 0), \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$
é uma equação vetorial de $\mathcal{P}$.

Para determinar uma equação cartesiana de $\mathcal{P}$ calcula-se um vetor n perpendicular a $\mathcal{P}$. Tem-se
$$n = v_{PA} \times v_{PB} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = e_2 - e_3 = (0, 1, -1).$$
Então, a equação cartesiana é da forma $y - z = d$ e, como, por exemplo $P \in \mathcal{P}$, obtém-se $d = 2 - 1 = 1$. Logo, $y - z = 1$ é uma equação cartesiana de $\mathcal{P}$.

(b) Sabe-se da alínea anterior que $n = (0, 1, -1)$ é um vetor perpendicular ao plano $\mathcal{P}$. Então, a reta $\mathcal{S}$ tem n como vetor diretor e passa pelo ponto P, pelo que
$$(x, y, z) = (2, 2, 1) + \alpha(0, 1, -1), \ \alpha \in \mathbb{R},$$

é uma equação vetorial da reta $\mathcal{S}$ Da equação vetorial obtém-se as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + \alpha \\ z = 1 - \alpha, \end{cases}$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$. Eliminando o parâmetro α das equações paramétricas, obtém-se as equações cartesianas:

$$x = 2 \wedge y - 2 = 1 - z.$$

(c) Como o plano $\mathcal{T}$ contém a reta $\mathcal{S}$ dada pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (2, 2, 1) + \alpha(0, 1, -1), \ \alpha \in \mathbb{R},$$

e contém a origem $O = (0, 0, 0)$, então $v_{PO} = O - P = (-2, -2, -1)$, onde $P = (2, 2, 1) \in \mathcal{S}$, é um vetor diretor de $\mathcal{T}$. Então,

$$(x, y, z) = (2, 2, 1) + \lambda(0, 1, -1) + \mu(-2, -2, -1), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

é uma equação vetorial de $\mathcal{T}$.

18. Considere a reta $\mathcal{R}$ definida pelas seguintes equações cartesianas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z.$$

(a) Determine uma equação vetorial do plano $\mathcal{P}$ que passa pelo ponto $P = (1, 2, 0)$ e é perpendicular à reta $\mathcal{R}$.

(b) Verifique se a reta $\mathcal{S}$ que passa pelo ponto $A = (0, 0, 8)$ e tem a direção do vetor $u = (1, -1, 1,)$ está contida no plano $\mathcal{P}$.

(a) A partir das equações cartesianas de $\mathcal{R}$, obtém-se as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 + 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + \alpha(2, 3, 1), \ \alpha \in \mathbb{R},$$

é uma equação vetorial de $\mathcal{R}$, sendo $(2, 3, 1)$ um vetor diretor de $\mathcal{R}$. Então, como $n = (2, 3, 1) \perp \mathcal{P}$, a expressão da equação cartesiana é da forma $2x + 3y + z = d$. Como $P = (1, 2, 0) \in \mathcal{P}$, obtém-se $d = 2 \times 1 + 3 \times 2 = 8$. Logo,

$$2x + 3y + z = 8$$

é uma equação cartesiana de $\mathcal{P}$. O plano $\mathcal{P}$ pode ser representado por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{(x, y, 8 - 2x - 3y) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, -2) + y(0, 1, -3) + (0, 0, 8) : x, y \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

donde se obtém a equação vetorial

$$(x,y,z) = (0,0,8) + \lambda(1,0,-2) + \mu(0,1,-3),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

(b) Sejam $\ell_1 = (1,0,-2)$ e $\ell_2 = (0,1,-3)$ os vetores diretores de $\mathcal{P}$ e $\ell_3 = (1,-1,1)$ o vetor diretor de $\mathcal{S}$. Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ com linhas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\ell_3 \leftarrow \ell_3 + \ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então $\operatorname{car}(A) = 2$, logo $\dim(\langle \ell_1, \ell_2, \ell_3 \rangle) = 2$. Note que, além disso, o ponto $A = (0,0,8)$ está contido no plano $\mathcal{P}$. Então, conclui-se que a reta $\mathcal{S}$ está contida no plano $\mathcal{P}$.

19. Seja $\mathcal{P}$ o plano definido pelos pontos $A = (2,1,-1)$, $B = (0,1,0)$, $C = (1,0,1)$. Determine um sistema de equações paramétricas e as equações cartesianas da reta $\mathcal{R}$ perpendicular ao plano $\mathcal{P}$ e que passa pelo ponto B.

Considere $v_{BA} = A - B = (2,0,-1)$ e $v_{BC} = C - B = (1,-1,1)$. Então, o vetor $n = v_{BA} \times v_{BC}$ é um vetor diretor da reta $\mathcal{R}$. Tem-se

$$n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -e_2 - 2e_3 - e_1 - 2e_2 = (-1,-3,-2).$$

Como $B \in \mathcal{R}$, então conclui-se que

$$(x,y,z) = (0,1,0) + \alpha(-1,-3,-2),\ \alpha \in \mathbb{R},$$

é uma equação vetorial de $\mathcal{R}$. Desta equação obtém-se as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = 1 - 3\alpha \\ z = -2\alpha, \end{cases}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Eliminando o parâmetro α, conclui-se que as equações cartesianas de $\mathcal{R}$ são definidas por

$$x = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

20. Escreva equações vetoriais das retas em $\mathbb{R}^3$ que são formadas pelos pontos (x,y,z) que satisfazem as seguintes condições:

(a) $x = 0$, $y = 3z$.

(b) $y = -\frac{1}{2}z$, $z = -4$.

(a) A reta em $\mathbb{R}^3$ pode ser representada por $\{(0, 3z, z) : z \in \mathbb{R}\}$, donde se obtém a equação vetorial

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \alpha(0, 3, 1), \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(b) Como $z = -4$, então $y = \frac{4}{2} = 2$. Assim, a reta em $\mathbb{R}^3$ pode ser representada por $\{(x, 2, -4) : x \in \mathbb{R}\}$, donde se obtém a equação vetorial

$$(x, y, z) = (0, 2, -4) + \alpha(1, 0, 0), \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

21. Verifique se a reta $\mathcal{R} = (3, 1, 2) + \langle(1, 1, 0)\rangle$ e o plano $\mathcal{P} = (2, 1, -1) + \langle(1, -1, 1), (2, 0, 1)\rangle$ são paralelos.

Sejam $\ell_1 = (1, 1, 0)$ o vetor diretor de $\mathcal{R}$ e $\ell_2 = (1, -1, 1)$, $\ell_3 = (2, 0, 1)$ os vetores diretores de $\mathcal{P}$. Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ com linhas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_1}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \ell_2}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então $\text{car}(A) = 2$, logo $\dim(\langle \ell_1, \ell_2, \ell_3 \rangle) = 2$. Tem-se $\langle(1, 1, 0)\rangle \subseteq \langle(1, -1, 1), (2, 0, 1)\rangle$. Assim, conclui-se que a reta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}$ são paralelos.

22. Verifique se a reta $\mathcal{R} = (3, 1, 2) + \langle(1, 1, 0)\rangle$ e a reta $\mathcal{S}$ dada pela equação vetorial $(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(1, 1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ são paralelas.

As retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são paralelas se $\langle(1, 1, 0)\rangle = \langle(1, 1, -1)\rangle$, pois $\dim(\mathcal{R}) = \dim(\mathcal{S}) = 1$. Como os vetores $(1, 1, 0)$ e $(1, 1, -1)$ são linearmente independentes, porque nenhum deles é combinação linear do outro ($\nexists k \in \mathbb{R} : (1, 1, 0) = k(1, 1, -1)$), então tem-se que $\langle(1, 1, 0)\rangle \neq \langle(1, 1, -1)\rangle$ e assim conclui-se que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ não são paralelas.

23. Considere os planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ definidos pelas equações vetoriais

$$(x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 0, 1), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

e

$$(x, y, z) = (2, 4, -3) + \lambda(3, 1, 3) + \mu(0, 1, 0), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

respetivamente. Verifique se os planos são paralelos.

Como $\dim(\mathcal{P}_1) = \dim(\mathcal{P}_2) = 2$, então os planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são paralelos se

$$\langle(1, 1, 1), (1, 0, 1)\rangle = \langle(3, 1, 3), (0, 1, 0).\rangle$$

Sejam $\ell_1 = (1, 1, 1)$, $\ell_2 = (1, 0, 1)$ os vetores diretores de $\mathcal{P}_1$ e $\ell_3 = (3, 1, 3)$, $\ell_4 = (0, 1, 0)$ os vetores diretores de $\mathcal{P}_2$. Considere a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ com linhas

$\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$. Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_3 - 3\ell_1}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{\ell_3 \leftarrow \ell_3 - 2\ell_2 \\ \ell_4 \leftarrow \ell_4 + \ell_2}}{\longleftrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então $\operatorname{car}(A) = 2$, logo $\dim(\langle \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \rangle) = 2$. Assim, tem-se

$$\langle (1,1,1), (1,0,1) \rangle = \langle (3,1,3), (0,1,0) \rangle$$

e pode então concluir-se que os planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são paralelos.

24. Considere o plano $\mathcal{P}$ definido pelos pontos $A = (1,0,1)$, $B = (2,1,2)$, $C = (0,2,1)$. Determine a equação cartesiana do plano $\mathcal{Q}$ paralelo a $\mathcal{P}$ contendo a origem do sistema de eixos e a equação cartesiana do plano $\mathcal{T}$ paralelo a $\mathcal{P}$, que passa pelo ponto $P = (-1, 0, -2)$.

Considere $v_{AB} = B - A = (1,1,1)$ e $v_{AC} = C - A = (-1,2,0)$. Então

$$n = v_{AB} \times v_{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -e_2 + 2e_3 + e_3 - 2e_1 = (-2, -1, 3)$$

é um vetor perpendicular a $\mathcal{Q}$. A equação cartesiana de $\mathcal{Q}$ tem a expressão $-2x - y + 3z = d$. Como $(0,0,0) \in \mathcal{Q}$, então $d = 0$, logo a equação cartesiana de $\mathcal{Q}$ é

$$-2x - y + 3z = 0.$$

Para determinar a equação cartesiana de $\mathcal{T}$, como $\mathcal{T} \parallel \mathcal{P}$, então $-2x - y + 3z = d$ e dado que $P = (-1, 0, -2) \in \mathcal{T}$, então $d = 2 - 6 = -4$. Logo, a equação cartesiana de $\mathcal{T}$ é dada por

$$-2x - y + 3z = -4.$$

25. Considere a reta $\mathcal{R}$ definida pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x = y + 3 \\ z = -y + 1 \end{cases}$$

e o plano $\mathcal{P}$ dado por $2x - 3y + 4z = 5$. Verifique se $\mathcal{R} \parallel \mathcal{P}$.

A partir do sistema de equações que define a reta $\mathcal{R}$ obtém-se a equação vetorial

$$(x, y, z) = (3, 0, 1) + \alpha(1, 1, -1), \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Então, $v = (1, 1, -1)$ é um vetor diretor de $\mathcal{R}$. Como $n = (2, -3, 4)$ é um vetor perpendicular ao plano $\mathcal{P}$, tem-se que $\mathcal{R} \parallel \mathcal{P}$ se e só se $n \cdot v = 0$. Como

$$n \cdot v = (2, -3, 4) \cdot (1, 1, -1) = -5 \neq 0,$$

então conclui-se que $\mathcal{R} \nparallel \mathcal{P}$.

26. Considere, no espaço $\mathbb{R}^3$, os pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (0, 2, 0)$ e $D = (1, 2, 1)$. Determine:

(a) a reta r definida pelos pontos A e B;
(b) a reta s que contém o ponto C e que é paralela à reta r;
(c) o plano α definido pelas retas r e s;
(d) o plano β definido pela reta r e pelo ponto D;
(e) o ponto de intersecção da reta r com o plano α.

(a) Seja $P = (x, y, z)$. Como $P \in r$ se e só se $v_{AP} \parallel v_{AB}$, onde $v_{AB} = (0, -2, -2)$, ou seja, $P - A = \alpha v_{AB}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$(x, y, z) = A + \alpha v_{AB} = (1, 2, 3) + \alpha(0, -2, -2), \alpha \in \mathbb{R}.$$

As equações cartesianas correspondentes são obtidas a partir de

$$\begin{cases} x = 1 \\ \frac{y-2}{-2} = \alpha \\ \frac{z-3}{-2} = \alpha, \end{cases}$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$, de onde se conclui, após eliminar α, que: $x = 1, y - z = -1$.

(b) Seja $P = (x, y, z)$. Como $C \in s$ e $v_{AB} \parallel s$, então $P \in s \Leftrightarrow (P - C) = \alpha v_{AB}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, de onde se obtém

$$P = C + \alpha v_{AB} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 2, 0) + \alpha(0, -2, -2).$$

As equações cartesianas correspondentes são obtidas de

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y-2}{-2} = \alpha \\ \frac{z}{-2} = \alpha, \end{cases}$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$, de onde se conclui, após eliminar α, que: $x = 0, y - z = 2$.

(c) Como $s \subset \alpha$ e $r \subset \alpha$, então $v_{AB} \parallel \alpha$ e $v_{AC} \parallel \alpha$. Logo $n = v_{AB} \times v_{AC} \perp \alpha$, sendo

$$n = v_{AB} \times v_{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6e_1 + 2e_2 - 2e_3 = (6, 2, -2).$$

Seja $P = (x, y, z) \in \alpha$. Então,

$$(P - A) \cdot n = 0 \Leftrightarrow (x - 1, y - 2, z - 3) \cdot (6, 2, -2) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - z = 2.$$

(d) Como $r \subset \beta$ e $D \in \beta$, então $v_{AB} \parallel \alpha$ e $v_{AD} \parallel \alpha$. Logo $n = v_{AB} \times v_{AD} \perp \alpha$, sendo

$$n = v_{AB} \times v_{AD} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4e_1 = (4, 0, 0).$$

Seja $P = (x, y, z) \in \alpha$. Então,

$$(P - A) \cdot n = 0 \Leftrightarrow (x - 1, y - 2, z - 3) \cdot (4, 0, 0) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

(e) Como $r \subset \alpha$ (ver alínea c)), então todos os pontos da reta r são pontos de interseção com o plano α, ou seja $r \cap \alpha = r$.

27. Seja $\mathcal{T}$ o plano perpendicular ao vetor $w = (1, 1, -1)$ e que passa pelo ponto $A = (0, 0, -3)$. Seja $P = (1, -1, 0)$ um ponto de $\mathbb{R}^3$. Determine a distância de P ao plano $\mathcal{T}$.

Sabe-se que $A = (0, 0, -3) \in \mathcal{T}$ e que $w = (1, 1, -1)$ é um vetor perpendicular a $\mathcal{T}$. Tem-se $v_{AP} = P - A = (1, -1, 3)$ e a distância do ponto P ao plano $\mathcal{T}$ pode ser calculada do seguinte modo:

$$d(P, \mathcal{T}) = \| \operatorname{proj}_w v_{AP} \| = \frac{|v_{AP} \cdot w|}{\|w\|} = \frac{|(1, -1, 3) \cdot (1, 1, -1)|}{\|(1, 1, 1)\|} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

28. Determine a distância entre o ponto $P = (0, 1, -2)$ e o plano α cuja equação cartesiana é $x + y + z = 1$.

Considere a reta r, perpendicular a α que passa em P, que é dada pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (0, 1, -2) + \lambda(1, 1, 1), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

O ponto de interseção $Q = \pi \cap r$ é obtido substituindo primeiro $(x, y, z) = (\lambda, 1 + \lambda, -2 + \lambda)$ na equação cartesiana de α:

$$\lambda + 1 + \lambda - 2 + \lambda = 1 \Leftrightarrow 3\lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3};$$

e o valor $\lambda = \frac{2}{3}$ na equação de r:

$$Q = (0, 1, -2) + \frac{2}{3} \times (1, 1, 1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

Então,

$$d(P, \pi) = d(P, Q) = \|v_{PQ}\| = \|Q - P\| = \|\frac{2}{3}(1, 1, 1)\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

29. Considere o plano $\mathcal{T}$ definido pela equação vetorial $(x, y, z) = (2, 0, 0) + \lambda(-2, 1, 0) + \mu(2, 0, -1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e a reta $\mathcal{R}$ definida pelas equações

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ z = -y - 1. \end{cases}$$

Calcule as coordenadas dos pontos da reta $\mathcal{R}$ que distam uma unidade do plano $\mathcal{T}$.

O vetor $n = (-2, 1, 0) \times (2, 0, -1)$ é perpendicular ao plano $\mathcal{T}$. Tem-se

$$n = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -e_1 - 2e_3 - 2e_2 = (-1, -2, -2).$$

Os pontos P que pertencem à reta $\mathcal{R}$ têm coordenadas $(y + 1, y, -y - 1)$, onde $y \in \mathbb{R}$.

Considere um ponto M qualquer do plano $\mathcal{T}$, por exemplo $M = (2, 0, 0) \in \mathcal{T}$ e considere $v_{MP} = P - M = (y - 1, y, -y - 1)$, onde $y \in \mathbb{R}$. Então, a distância dos pontos P da reta $\mathcal{R}$ ao plano $\mathcal{T}$ é

$$\begin{aligned} d(P, \mathcal{T}) &= \|\operatorname{proj}_n v_{MP}\| \\ &= \frac{|v_{MP} \cdot n|}{\|n\|} \\ &= \frac{|(y-1, y, -y-1) \cdot (-1, -2, -2)|}{\|(-1, -2, -2)\|} \\ &= \frac{|-y + 1 - 2y + 2y + 2|}{3} \\ &= \frac{|-y+3|}{3}. \end{aligned}$$

Assim, tem-se

$$d(P, \mathcal{T}) = 1 \Leftrightarrow \frac{|-y+3|}{3} = 1 \Leftrightarrow (-y + 3 = 3 \vee y - 3 = 3) \Leftrightarrow (y = 0 \vee y = 6).$$

Substituindo estes dois valores de y nas expressões das coordenadas dos pontos P, concui-se que $P = (1, 0, -1)$ (correspondente a $y = 1$) e $P = (7, 6, -7)$ (correspondente a $y = 6$) são os pontos da reta $\mathcal{R}$ que distam de $\mathcal{T}$ uma unidade.

30. Seja $\mathcal{T}$ o plano paralelo ao plano $\mathcal{T}'$ de equação $2x - y + 3z = 10$ e que passa pelo ponto $Q = (2, 3, 4)$. Seja $P = (3, 4, 5) \in \mathbb{R}^3$. Determine a distância do ponto P ao plano $\mathcal{T}$.
Como $\mathcal{T} \parallel \mathcal{T}'$, então $n = (2, -1, 3)$ é um vetor perpendicular a $\mathcal{T}$. Assim, considerando $v_{PQ} = Q - P = (-1, -1, -1)$, vem

$$\begin{aligned} d(P, \mathcal{T}) &= \|\operatorname{proj}_n v_{PQ}\| \\ &= \frac{|v_{PQ} \cdot n|}{\|n\|} \\ &= \frac{|(-1, -1, -1) \cdot (2, -1, 3)|}{\|(2, -1, 3)\|} \\ &= \frac{|-4|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{2\sqrt{14}}{7}. \end{aligned}$$

31. Seja $\mathcal{R}$ a reta definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (2, 1, 2) + \lambda(1, 2, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $P = (2, 3, 3)$ um ponto de $\mathbb{R}^3$. Determine a distância de P à reta $\mathcal{R}$.
Seja A um ponto qualquer da reta $\mathcal{R}$, por exemplo $A = (2, 1, 2) \in \mathcal{R}$. Seja $n = (1, 2, 2)$ o vetor diretor de $\mathcal{R}$ e considere $v_{AP} = P - A = (0, 2, 1)$. Então,

$$\operatorname{proj}_n v_{AP} = \frac{v_{AP} \cdot n}{n \cdot n} n = \frac{(0, 2, 1) \cdot (1, 2, 2)}{(1, 2, 2) \cdot (1, 2, 2)}(1, 2, 2) = \frac{6}{9}(1, 2, 2) = \frac{2}{3}(1, 2, 2)$$

e, assim,

$$\begin{aligned} d(P, \mathcal{R}) &= \|v_{AP} - \operatorname{proj}_n v_{AP}\| \\ &= \left\| (0, 2, 1) - \frac{2}{3}(1, 2, 2) \right\| \end{aligned}$$

$$= \left\| \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right\|$$
$$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}}$$
$$= 1.$$

32. Considere a reta $\mathcal{R}$ definida pelo sistema de equações

$$\begin{cases} x + \ \ y - \ \ z = 4 \\ x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$$

e o ponto $P = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Determine a distância de P à reta $\mathcal{R}$.

Seja $A\bar{x} = b$ o sistema de equações lineares que representa a reta $\mathcal{R}$, onde $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$, $\bar{x} = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right]$. Então, tem-se

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

Como $\text{car}(A) = \text{car}(A|b) = 2 < n = 3$, onde n é o número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado, sendo z uma incógnita livre. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y - \ \ z = 4 \\ \qquad y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - z \\ y = 2z. \end{cases}$$

Então, a equação vetorial da reta é dada por

$$(x, y, z) = (4, 0, 0) + \alpha(-1, 2, 1), \alpha \in \mathbb{R},$$

Seja A um ponto qualquer da reta $\mathcal{R}$, por exemplo $A = (4, 0, 0) \in \mathcal{R}$. Seja $n = (-1, 2, 1)$ o vetor diretor de $\mathcal{R}$ e considere $v_{AP} = P - A = (-3, 0, 1)$. Então,

$$\begin{aligned} \text{proj}_n\, v_{AP} &= \frac{v_{AP} \cdot n}{n \cdot n} n \\ &= \frac{(-3, 0, 1) \cdot (-1, 2, 1)}{(-1, 2, 1) \cdot (-1, 2, 1)} (-1, 2, 1) \\ &= \frac{4}{6}(-1, 2, 1) \\ &= \frac{2}{3}(-1, 2, 1) \end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} d(P, \mathcal{R}) &= \|v_{AP} - \text{proj}_n\, v_{AP}\| \\ &= \left\| (-3, 0, 1) - \frac{2}{3}(-1, 2, 1) \right\| \\ &= \left\| \left(-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\| \\ &= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{66}}{3}. \end{aligned}$$

33. Considere os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ definidos pelas equações $2x-y+3z-1=0$ e $3x+2y+5z+2=0$, respetivamente. Determine a distância entre os dois planos.

Sejam $n_1 = (2,-1,3)$ e $n_2 = (3,2,5)$ os vetores perpendiculares aos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$, respetivamente. Como n_1 e n_2 são linearmente independentes, pois nenhum deles é combinação linear do outro (*i.e.* $\nexists k \in \mathbb{R} : n_1 = kn_2$), então os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$ intersetam-se. Assim, conclui-se que $d(\mathcal{P},\mathcal{T}) = 0$.

34. Sejam $\mathcal{P}$ o plano definido pela equação

$$(x,y,z) = (1,1,-1) + \lambda(0,1,-1) + \mu(4,-1,-1), \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

e $\mathcal{T}$ o plano definido por $x + \alpha y + 2z + \beta = 0$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Determine os valores de α e β para que os dois planos distam três unidades.

Sabe-se que vetor $n_1 = (0,1,-1) \times (4,-1,-1)$ é perpendicular ao plano $\mathcal{P}$. Tem-se

$$n_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -e_1 - 4e_2 - 4e_3 - e_1 = (-2,-4,-4).$$

Para que a distância entre os dois planos seja igual a três unidades, os planos têm que ser paralelos. Assim, os vetores perpendiculares a $\mathcal{P}$ e $\mathcal{T}$, que são $n_1 = (-2,-4,-4)$ e $n_2 = (1,\alpha,2)$, respetivamente, têm que ser linearmente dependentes, ou seja, é possível escrever um deles como combinação linear do outro. Logo, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$(-2,-4,-4) = k(1,\alpha,2) \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ \alpha k = -4, \end{cases}$$

donde se conclui que $\alpha = 2$.

Seja Q um ponto arbitrário de $\mathcal{P}$, por exemplo $Q = (1,1,-1) \in \mathcal{P}$. Considere ainda um ponto arbitrário $A \in \mathcal{T}$, por exemplo escolhendo $y = 0$ e $z = 0$ obtém-se o ponto $A = (\beta,0,0) \in \mathcal{T}$, e o vetor normal $n_2 = (1,2,2)$ ao plano $\mathcal{T}$. Então, como

$$d(\mathcal{P},\mathcal{T}) = d(Q,\mathcal{T}) = \|\operatorname{proj}_{n_2} v_{AQ}\|,$$

onde $v_{AQ} = Q - A = (1-\beta,1,-1)$, pode calcular-se a distância da seguinte forma

$$\begin{aligned} d(\mathcal{P},\mathcal{T}) &= \|\operatorname{proj}_{n_2} v_{AQ}\| \\ &= \frac{|v_{AQ}\cdot n_2|}{\|n_2\|} \\ &= \frac{|(1-\beta,1,-1)\cdot(1,2,2)|}{\|(1,2,2)\|} \\ &= \frac{|1-\beta+2-2|}{3} \\ &= \frac{|1-\beta|}{3}. \end{aligned}$$

Como a distância deve ser igual a três unidades, então

$$d(\mathcal{P},\mathcal{T}) = 3 \Leftrightarrow \frac{|1-\beta|}{3} = 3 \Leftrightarrow 1-\beta = 9 \vee 1-\beta = -9 \Leftrightarrow \beta = -8 \vee \beta = 10.$$

Assim, conlcui-se que $d(\mathcal{P},\mathcal{T}) = 3$ para $\alpha = 2$ e $\beta \in \{-8,10\}$.

35. Sejam $\mathcal{R}$ a reta definida pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (2, 4, 6) + \lambda(2, -1, 3), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

e $\mathcal{P}$ o plano definido por $2x - y + 3z = 2$. Determine a distância da reta ao plano. Seja $n = (2, -1, 3)$ o vetor normal a $\mathcal{P}$ e $v = (2, -1, 3)$ o vetor diretor de $\mathcal{R}$. Como $n = v$, então a reta $\mathcal{R}$ interseta $\mathcal{P}$ ortogonalmente, logo $d(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = 0$.

36. Considere o plano $\mathcal{P}$ de equação $x - y + z = 1$ e $\mathcal{R}$ a reta definida pelo sistema

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ z = -y + 3. \end{cases}$$

Determine a distância entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{P}$.

A partir do sistema de equações que define a reta, obtém-se a equação vetorial

$$(x, y, z) = (-1, 0, 3) + \alpha(2, 1, -1), \ \alpha \in \mathbb{R}$$

de $\mathcal{R}$

Seja $n = (1, -1, 1)$ o vetor normal a $\mathcal{P}$ e $v = (2, 1, -1)$ o vetor diretor de $\mathcal{R}$. A reta $\mathcal{R}$ é paralela ao plano $\mathcal{P}$, porque

$$n \cdot v = (2, 1, -1) \cdot (1, -1, 1) = 0.$$

Tem-se ainda que $\mathcal{R} \not\subset \mathcal{P}$, porque, por exemplo $Q = (-1, 0, 3) \in \mathcal{R}$ e $Q \notin \mathcal{P}$. Seja A um ponto qualquer de $\mathcal{P}$, por exemplo $A = (1, 0, 0) \in \mathcal{P}$. Então,

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = d(\mathcal{P}, Q) = \| \operatorname{proj}_n v_{AQ} \|.$$

Como $v_{AQ} = Q - A = (-2, 0, 3)$, obtém-se

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = \| \operatorname{proj}_n v_{AQ} \| = \frac{|v_{AQ} \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|(-2, 0, 3) \cdot (1, -1, 1)|}{\|(1, -1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

37. Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ as retas definidas pelos sistemas

$$\begin{cases} y = \beta x - \beta \\ z = -2x + 4 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ z = -2x + 2 + \beta \end{cases},$$

respetivamente. Determine a distância entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ em função do parâmetro β supondo que:

(a) $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são concorrentes.

(b) $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são paralelas.

(a) As retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são concorrentes se existe um ponto de intersecção entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Isto significa que o sistema de equações lineares correspondente à igualdade entre as coordenadas dos pontos pertencentes a $\mathcal{R}$ e a $\mathcal{S}$

$$(x, \beta x - \beta, -2x + 4) = (x, x - 1, -2x + 2 + \beta)$$

tem que ser possível para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Igualando as coordenadas correspondentes, obtém-se

$$\begin{cases} x = x \\ \beta x - \beta = x - 1 \\ -2x + 4 = -2x + 2 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Assim, conclui-se que para $\beta = 2$ as retas são concorrentes e $d(\mathcal{R}, \mathcal{S}) = 0$.

(b) Considere as equações vetoriais das retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ dadas por

$$(x, y, z) = (0, -\beta, 4) + \lambda(1, \beta, -2), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

e

$$(x, y, z) = (0, -1, 2 + \beta) + \mu(1, 1, -2), \ \mu \in \mathbb{R},$$

respetivamente. As retas são paralelas se e só se os vetores diretores de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são linearmente dependentes. Assim, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, \beta, -2) = k(1, 1, -2) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ \beta = 1. \end{cases}$$

Assim, conclui-se que para $\beta = 1$ as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são paralelas com equações vetorias dadas por

$$(x, y, z) = (0, -1, 4) + \lambda(1, 1, -2), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

e

$$(x, y, z) = (0, -1, 3) + \mu(1, 1, -2), \ \mu \in \mathbb{R},$$

respetivamente. Note que $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \emptyset$, porque as duas retas passam em pontos distintos ($(0, -1, 4)$ e $(0, -1, 3)$).

Neste caso, a distância entre as duas retas pode ser obtida a partir da distância de uma das reta a um ponto da outra reta.

Seja A um ponto qualquer da reta $\mathcal{R}$, por exemplo $A = (0, -1, 4) \in \mathcal{R}$. Seja $n = (1, 1, -2)$ o vetor diretor de $\mathcal{R}$ e considere $P = (0, -1, 3) \in \mathcal{S}$ e $v_{AP} = P - A = (0, 0, -1)$. Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_n v_{AP} &= \frac{v_{AP} \cdot n}{n \cdot n} n \\ &= \frac{(0, 0, -1) \cdot (1, 1, -2)}{(1, 1, -2) \cdot (1, 1, -2)} (1, 1, -2) \\ &= \frac{2}{6}(1, 1, -2) \\ &= \frac{1}{3}(1, 1, -2) \end{aligned}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} d(P, \mathcal{R}) &= \|v_{AP} - \operatorname{proj}_n v_{AP}\| \\ &= \left\| (0, 0, -1) - \frac{1}{3}(1, 1, -2) \right\| \end{aligned}$$

$$= \left\| \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \right\|$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

38. Considere a reta $\mathcal{R}$ que passa pelo ponto $A = (3, 1, 2)$ e tem a direção do vetor $u = (1, 1, 0)$, o plano $\mathcal{P}$ definido pela equação $2x + y - z = -9$, e o ponto $Q = (4, 3, 3)$. Determine:

(a) o ângulo entre a reta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}$.

(b) o ângulo entre o plano $\mathcal{P}$ e o plano $\mathcal{Q}$ que contém a reta $\mathcal{R}$ e passa pelo ponto Q.

(c) o ângulo entre a reta $\mathcal{R}$ e a reta $\mathcal{S}$ que passa pelos pontos A e Q.

(a) Sendo $u = (1, 1, 0)$ um vetor diretor de $\mathcal{R}$ e $n = (2, 1, -1) \perp \mathcal{P}$, então

$$\begin{aligned}
\angle(\mathcal{R}, \mathcal{P}) &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{|u \cdot n|}{\|u\|\|n\|}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\frac{|(1,1,0) \cdot (2,1,-1)|}{\|(1,1,0)\|\|(2,1,-1)\|}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Sabe-se que $n = (2, 1, -1) \perp \mathcal{P}$.

Como $A, Q \in \mathcal{Q}$, então $v_{AQ} = Q - A = (1, 2, 1)$ é um vetor diretor de $\mathcal{Q}$. Além disso $u = (1, 1, 0)$ também é um vetor diretor de $\mathcal{Q}$, porque $\mathcal{R} \subset \mathcal{Q}$. Para determinar um vetor m perpendicular a $\mathcal{Q}$ calcula-se $u \times v_{AQ}$. Assim, obtém-se

$$m = u \times v_{AQ} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = e_1 + 2e_3 - e_3 - e_2 = (1, -1, 1).$$

Sendo $n = (2, 1, -1) \perp \mathcal{P}$ e $m = (1, -1, 1) \perp \mathcal{Q}$, então

$$\begin{aligned}
\angle(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) &= \arccos\left(\frac{|n \cdot m|}{\|n\|\|m\|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{|(2,1,-1) \cdot (1,-1,1)|}{\|(2,1,-1)\|\|(1,-1,1)\|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{|2-1-1|}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1+1}}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{0}{\sqrt{6}\sqrt{3}}\right) \\
&= \arccos(0) \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(c) A reta $\mathcal{S}$ que passa pelos pontos A e Q tem vetor diretor $v = v_{AQ} = Q - A = (1, 2, 1)$. Então, o ângulo entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ é dado por

$$\angle(\mathcal{R}, s) = \arccos\left(\frac{|u \cdot v|}{\|u\|\|v\|}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \arccos\left(\frac{|(1,1,0)\cdot(1,2,1)|}{\|(1,1,0)\|\|(1,2,1)\|}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{|1+2|}{\sqrt{1+1}\sqrt{1+4+1}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

39. Considere o plano $\mathcal{P}$ definido por $(x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,0,1) + \mu(0,2,1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, e o plano $\mathcal{Q}$ definido pelos pontos $A = (1,2,3)$, $B = (2,0,1)$ e $C = (0,0,0)$. Determine o ângulo entre os dois planos.

Sejam $n_1 \perp \mathcal{P}$ e $n_2 = v_{AB} \times v_{AC} \perp \mathcal{Q}$. Então, tem-se

$$n_1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2e_3 - 2e_1 - e_2 = (-2,-1,2).$$

Como $v_{AB} = B - A = (1,-2,-2)$ e $v_{AC} = C - A = (-1,-2,-3)$, vem

$$n_2 = v_{AB} \times v_{AC} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 6e_1 + 2e_2 - 2e_3 - 2e_3 - 4e_1 + 3e_2 = (2,5,-4).$$

Assim, obtém-se

$$\begin{aligned}
\angle(\mathcal{P},\mathcal{Q}) &= \arccos\left(\frac{|n_1\cdot n_2|}{\|n_1\|\|n_2\|}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{|(-2,-1,2)\cdot(2,5,-4)|}{\|(-2,-1,2)\|\|(2,5,-4)\|}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{|-4-5-8|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{4+25+16}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{17}{\sqrt{9}\sqrt{45}}\right)\\
&= \arccos\left(\frac{\sqrt{17}}{9\sqrt{5}}\right).
\end{aligned}$$

40. Sejam $A = (1,2,-2)$, $\mathcal{R}$ a reta de equação $(x,y,z) = (2,1,0) + \lambda(1,0,1)$ e $\mathcal{P}$ o plano de equação $x + 3y + 4z = 0$. Determine:

(a) o ângulo entre a reta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}$.

(b) a equação cartesiana do plano $\mathcal{Q}$ paralelo a $\mathcal{P}$ que passa por A.

(c) a distância entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

(d) a distância entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{P}$.

(a) Sendo $(1,0,1)$ um vetor diretor de $\mathcal{R}$ e $(1,3,4) \perp \mathcal{P}$, então

$$\angle(\mathcal{R},\mathcal{P}) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{|(1,0,1)\cdot(1,3,4)|}{\|(1,0,1)\|\|(1,3,4)\|}\right)$$

$$= \operatorname{arcsen}\left(\frac{|1+4|}{\sqrt{1+1}\sqrt{1+9+16}}\right)$$
$$= \operatorname{arcsen}\left(\frac{5}{\sqrt{2}\sqrt{26}}\right)$$
$$= \operatorname{arcsen}\left(\frac{5}{2\sqrt{13}}\right).$$

(b) Como $\mathcal{Q} \parallel \mathcal{P}$, então $(1,3,4)$ é um vetor perpendicular a $\mathcal{Q}$. Então, a equação cartesiana de $\mathcal{Q}$ é dada por $x+3y+4z=d$ e, como $A=(1,2,-2)\in\mathcal{Q}$, vem $d=1+3\times 2+4\times(-2)=-1$. Logo, a equação cartesiana de $\mathcal{Q}$ é

$$x+3y+4z=-1.$$

(c) Os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são paralelos porque têm o mesmo vetor normal $n=(1,3,4)$. Seja Q um ponto arbitrário de $\mathcal{P}$, por exemplo $Q=(3,-1,0)\in\mathcal{P}$. Considere ainda um ponto arbitrário de $\mathcal{Q}$, por exemplo $A=(1,2,-2)\in\mathcal{Q}$. Então, como

$$d(\mathcal{P},\mathcal{Q})=d(Q,\mathcal{Q})=\|\operatorname{proj}_n v_{AQ}\|,$$

pode calcular-se a distância da seguinte forma

$$\begin{aligned} d(\mathcal{P},\mathcal{Q}) &= \|\operatorname{proj}_n v_{AQ}\| \\ &= \frac{|v_{AQ}\cdot n|}{\|n\|} \\ &= \frac{|(Q-A)\cdot n|}{\|n\|} \\ &= \frac{|(2,-3,2)\cdot(1,3,4)|}{\|(1,3,4)\|} \\ &= \frac{|2-9+8|}{\sqrt{1+9+16}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{26}} \\ &= \frac{\sqrt{26}}{26}. \end{aligned}$$

(d) Considere o vetor diretor $v=(1,0,1)$ de $\mathcal{R}$ e o vetor perpendicular a $\mathcal{P}$, dado por $n=(1,3,4)$. Como

$$v\cdot n=(1,0,1)\cdot(1,3,4)=1+4=5\neq 0,$$

então conclui-se que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{P}$ não são paralelos. Logo, a reta $\mathcal{R}$ interseta $\mathcal{P}$ e, assim, $d(\mathcal{R},\mathcal{P})=0$. (Note que $\mathcal{R}$ não está contida em $\mathcal{P}$, porque $(2,1,0)\in\mathcal{R}$ e $(2,1,0)\notin\mathcal{P}$, porque

$$2+3\times 1+4\times 0=5\neq 0.$$

41. Considere as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ definidas pelas equações $(x,y,z)=(1,2,3)+\lambda(4,0,-3),\ \lambda\in\mathbb{R}$, e

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+4}{4},$$

respetivamente. Determine o ângulo entre as duas retas.

A partir das equações cartesianas de $\mathcal{S}$ obtém-se

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{3} \\ \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = y-2 \\ 4y-8 = 3z+12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -\frac{20}{3} + \frac{4}{3}y, \end{cases}$$

donde se conclui que a equação vetorial de $\mathcal{S}$ é

$$(x,y,z) = \left(0,0,-\frac{20}{3}\right) + \mu\left(1,1,\frac{4}{3}\right),\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Então, o ângulo entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\angle(\mathcal{R},\mathcal{S}) &= \arccos\left(\frac{\left|(4,0,-3)\cdot\left(1,1,\frac{4}{3}\right)\right|}{\|(4,0,-3)\|\left\|\left(1,1,\frac{4}{3}\right)\right\|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{|4-4|}{\sqrt{16+9}\sqrt{1+1+\frac{16}{9}}}\right) \\
&= \arccos(0) \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

42. Considere, no espaço $\mathbb{R}^3$, o plano $\alpha : x+2y=3$, o plano $\beta : x+y-z=0$, a reta r definida pelos pontos $A=(1,2,3)$ e $B=(1,0,1)$ e a reta s definida pelas equações $x+y-z=4$ e $x+2y-3z=4$. Determine:

(a) $\angle(r,s)$.

(b) $\angle(\alpha,r)$.

(c) $\angle(\alpha,\beta)$.

(d) A reta t que contém o ponto A e que é perpendicular ao plano α.

(e) $d(A,\alpha)$.

(f) $d(B,s)$.

(g) O plano que contém a reta r e que é perpendicular ao plano α.

(a) O vetor $v_{AB} = B - A = (0,-2,-2)$ é um vetor diretor da reta r. Para determinar um vetor diretor da reta s, tendo em conta que r é dada por um sistema de duas equações lineares, determina-se o seu conjunto solução:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right] \underset{\ell_2 \leftarrow \ell_2 - \ell_1}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right],$$

Assim, z é a incógnita livre, vindo: $y\_2z = 0 \Leftrightarrow y = 2z$ e $x+y-z=4 \Leftrightarrow x = 4-z$, pelo que $\text{CS} = \{(4-z, 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Assim, conclui-se que a equação vetorial de s é

$$(x,y,z) = (4,0,0) + \lambda(-1,2,1),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

e $(-1,2,1)$ é um vetor diretor de s. Então, o ângulo entre r e s é dado por

$$\begin{aligned}
\angle(r,s) &= \arccos\left(\frac{|(0,-2,-2)\cdot(-1,2,1)|}{\|(0,-2,-2)\|\|(-1,2,1)\|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{|-4-2|}{\sqrt{4+4}\sqrt{1+4+1}}\right)
\end{aligned}$$

$$= \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{8}\sqrt{6}}\right)$$
$$= \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{6}.$$

(b) Como $v_{AB} = B - A = (0, -2, -2)$ é um vetor diretor de r e $(1, 2, 0) \perp \alpha$, então

$$\begin{aligned}\angle(r, \alpha) &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{|(0,-2,-2)\cdot(1,2,0)|}{\|(0,-2,-2)\|\|(1,2,0)\|}\right)\\ &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{|-4|}{\sqrt{4+4}\sqrt{1+4}}\right)\\ &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right).\end{aligned}$$

(c) Sendo $(1, 2, 0) \perp \alpha$ e $(1, 1, -1) \perp \beta$, então

$$\begin{aligned}\angle(\alpha, \beta) &= \arccos\left(\frac{|(1,2,0)\cdot(1,1,-1)|}{\|(1,2,0)\|\|(1,1,-1)\|}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{|1+2|}{\sqrt{1+4}\sqrt{1+1+1}}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{3}}\right)\\ &= \arccos\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right).\end{aligned}$$

(d) Como $A \in t$ e $t \perp \alpha$, então $n = (1, 2, 0)$ é um vetor diretor de t e a equação vetorial de t é dada por: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, 0), \lambda \in \mathbb{R}$. Das equações paramétricas correspondentes

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = 3 \end{cases}$$

obtém-se

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \lambda \\ \frac{y-2}{2} = \lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = 3 \end{cases}$$

e eliminando o parâmetro λ, vem: $2x - y = 0, z = 3$.

(e) Seja h a reta perpendicular a α que passa em A, então a equação vetorial de h é: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Seja $Q = \alpha \cap h$. Substituindo $(x, y, z) = (1 + \lambda, 2 + 2\lambda, 3)$ na equação cartesiana de α, obtém-se

$$1 + \lambda + 2(2 + 2\lambda) = 3 \Leftrightarrow 5\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{5},$$

logo, $Q = (1, 2, 3) - \frac{2}{5} \times (1, 2, 0)$. Então,

$$\begin{aligned}d(A, \alpha) &= d(A, Q)\\ &= \|v_{AQ}\|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| -\frac{2}{5} \times (1,2,0) \right\| \\
&= \left| -\frac{2}{5} \right| \times \|(1,2,0)\| \\
&= \frac{2\sqrt{5}}{5}.
\end{aligned}
$$

(f) Seja π o plano perpendicular a s que passa em B. Como $(-1,2,1)$ é um vetor diretor de s (ver alínea a)), então o plano π é dado pela equação $-x+2y+z=d$. Como $B \in \pi$, então $d=-1+0+1=0$, logo $\pi: \ -x+2y+z=0$. Seja $Q=\pi \cap s$. Substituindo $(x,y,z)=(4-\lambda, 2\lambda, \lambda)$ – obtido a partir da equação vetorial de s da alínea a) – na equação cartesiana de π, obtém-se

$$-4+\lambda+4\lambda+\lambda=0 \Leftrightarrow 6\lambda=4 \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}.$$

Então,

$$Q=(4,0,0)+\frac{2}{3}\times(-1,2,1)=\frac{1}{3}(10,4,2)$$

e

$$d(B,s)=d(B,Q)=\|v_{BQ}\|=\left\|\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\|=\frac{\sqrt{66}}{3}.$$

(g) Seja π o plano tal que $r \subset \pi$ e $\alpha \perp \pi$. Como $(1,2,0) \perp \alpha$ e $(0,-2,-2)$ é um vetor diretor da reta r (ver alínea a)), então $n=(1,2,0)\times(0,-2,-2) \perp \pi$. Calculando o produto vetorial, obtém-se

$$
\begin{aligned}
n &= (1,2,0)\times(0,-2,-2) \\
&= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -4e_1 - 2e_3 + 2e_2 \\
&= (-4,2,-2).
\end{aligned}
$$

Assim, o plano π é dado pela equação $-4x+2y-2z=d$ e como $(1,2,3)\in\pi$, porque $A \in r \Rightarrow A \in \pi$, então $d=-4+4-6=-6$, logo

$$\pi: \ -4x+2y-2z=-6 \Leftrightarrow 2x-y+z=3.$$

43. Seja $\mathcal{R}$ a reta definida pelo sistema de equações

$$\begin{cases} 2x-2=y-1 \\ \alpha x-\alpha=z. \end{cases}$$

Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais $\mathcal{R}$ é paralela ao plano $\mathcal{P}$ de equação $2x+4y+z=-5$ e calcule a distância de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{P}$.

O sistema de equações que define a reta $\mathcal{R}$ pode ser reescrito da forma

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ z=\alpha x-\alpha, \end{cases}$$

donde se obtém a equação vetorial

$$(x, y, z) = (0, -1, \alpha) + \lambda(1, 2, \alpha),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Considere o vetor diretor $v = (1, 2\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ de $\mathcal{R}$ e seja $n = (2, 4, 1)$ um vetor perpendicular ao plano dado, que será designado por $\mathcal{P}$. A reta $\mathcal{R}$ é paralela ao plano $\mathcal{P}$ se e só se

$$n \cdot v = 0 \Leftrightarrow (2, 4, 1) \cdot (1, 2, \alpha) = 0 \Leftrightarrow 2 + 8 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -10.$$

Então, para $\alpha = -10$ a reta $\mathcal{R}$ é paralela ao plano e o vetor diretor é definido por $v = (1, 2, -10)$.

Tem-se ainda que $\mathcal{R}$ não está contida no plano porque, por exemplo $Q = (0, -1, -10) \in \mathcal{R}$ e $Q \notin \mathcal{P}$, porque $2 \times 0 + 4 \times (-1) - 10 = -14 \neq -5$. Seja A um ponto qualquer de $\mathcal{P}$, por exemplo $A = (0, 0, -5) \in \mathcal{P}$. Então,

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = d(\mathcal{P}, Q) = \| \operatorname{proj}_n v_{AQ} \|,$$

onde $n = (2, 4, 1)$ é um vetor perpendicular a $\mathcal{P}$. Como $v_{AQ} = Q - A = (0, -1, -5)$, obtém-se

$$\begin{aligned} d(\mathcal{P}, \mathcal{R}) &= \| \operatorname{proj}_n v_{AQ} \| \\ &= \frac{|v_{AQ} \cdot n|}{\|n\|} \\ &= \frac{|(0, -1, -5) \cdot (2, 4, 1)|}{\|(2, 4, 1)\|} \\ &= \frac{|-4-5|}{\sqrt{4+16+1}} \\ &= \frac{9}{\sqrt{21}}. \end{aligned}$$

44. Sejam $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{O}$ os planos definidos pelas equações $-2x + 4y - 2z = -3$, $x + 2z = 1$, e $2x + 4y + 6z = -2$, respetivamente.

(a) Determine o ângulo entre os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

(b) Determine a reta $\mathcal{R}$ que está contida simultaneamente nos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

(c) Calcule a distância da reta $\mathcal{R}$ ao plano $\mathcal{O}$.

(a) Sejam $n_1 = (-2, 4, -2) \perp \mathcal{P}$ e $n_2 = (1, 0, 2) \perp \mathcal{Q}$. Então, vem

$$\begin{aligned} \angle(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) &= \arccos\left(\frac{|n_1 \cdot n_2|}{\|n_1\|\|n_2\|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{|(-2, 4, -2) \cdot (1, 0, 2)|}{\|(-2, 4, -2)\|\|(1, 0, 2)\|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{|-2+0-4|}{\sqrt{4+16+4}\sqrt{1+4}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{24}\sqrt{5}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{30}}\right). \end{aligned}$$

(b) Como $\angle(\mathcal{P},\mathcal{Q}) \neq 0$ (pela alínea anterior), então os planos intersetam-se numa reta $\mathcal{R}$ que está contida simultaneamente nos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

Considere o sistema das equações cartesianas de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$

$$\begin{cases} -2x+4y-2z=-3 \\ x \qquad\;\; +2z=1 \end{cases},$$

que será representado por $A\bar{x}=b$, onde $A=\left[\begin{smallmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, $b=\left[\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $\bar{x}=\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right]$. Então, tem-se

$$A|b \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \frac{1}{2}\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Como $\operatorname{car}(A)=\operatorname{car}(A|b)=2<n=3$, onde n é o número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado, sendo z uma incógnita livre. O sistema é equivalente ao sistema de equações lineares

$$\begin{cases} -2x+4y-2z=-3 \\ \qquad\quad 2y+\; z=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2z \\ y=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}z. \end{cases}$$

Então, a equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ é dada por

$$(x,y,z)=\left(1,-\frac{1}{4},0\right)+\alpha\left(-2,-\frac{1}{2},1\right), \alpha \in \mathbb{R}.$$

(c) Seja $n=(2,4,6)$ o vetor normal a $\mathcal{O}$ e $v=\left(-2,-\frac{1}{2},1\right)$ o vetor diretor de $\mathcal{R}$. A reta $\mathcal{R}$ é paralela ao plano $\mathcal{O}$, porque

$$n\cdot v=(2,4,6)\cdot\left(-2,-\frac{1}{2},1\right)=-4-2+6=0.$$

Tem-se ainda que $\mathcal{R}\not\subset\mathcal{O}$, porque, por exemplo $Q=\left(1,-\frac{1}{4},0\right)\in\mathcal{R}$ e $Q\notin\mathcal{O}$, porque $2\times 1+4\times\left(-\frac{1}{4}\right)+6\times 0=1\neq -2$. Seja A um ponto qualquer de $\mathcal{O}$, por exemplo $A=(-1,0,0)\in\mathcal{O}$. Então,

$$d(\mathcal{O},\mathcal{R})=d(\mathcal{O},Q)=\|\operatorname{proj}_n v_{AQ}\|.$$

Como $v_{AQ}=Q-A=\left(2,-\frac{1}{4},0\right)$, obtém-se

$$\begin{aligned} d(\mathcal{O},\mathcal{R}) &= \|\operatorname{proj}_n v_{AQ}\| \\ &= \frac{|v_{AQ}\cdot n|}{\|n\|} \\ &= \frac{|\left(2,-\frac{1}{4},0\right)\cdot(2,4,6)|}{\|(2,4,6)\|} \\ &= \frac{4-1}{\sqrt{4+16+36}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{56}}. \end{aligned}$$

45. Considere as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ definidas pelas equações $(x,y,z)=(1,0,1)+\lambda(0,1,-2),\ \lambda\in\mathbb{R}$ e $(x,y,z)=(2,0,1)+\mu(0,2,1),\ \mu\in\mathbb{R}$ respetivamente. Determine:

(a) a distância entre as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

(b) a equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$ que contém a reta $\mathcal{R}$ e é paralelo à reta $\mathcal{S}$.

(c) a distância entre a reta $\mathcal{S}$ e o plano $\mathcal{P}$.

(a) As retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ não são paralelas, porque os vetores diretores $(0,1,-2)$ e $(0,2,1)$ são linearmente independentes (porque nenhum deles é combinação linear do outro, *i.e.* $\nexists k \in \mathbb{R}[(0,1,-2) = k(0,2,1)]$). As retas não se intersetam porque igualando as coordenadas dos pontos pertencentes a $\mathcal{R}$ e a $\mathcal{S}$, obtém-se

$$\begin{cases} 1 = 2 \\ \lambda = \mu \\ 1 - 2\lambda = 1 + \mu, \end{cases}$$

que é um sistema impossível. Assim, conclui-se que $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \emptyset$, logo as retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são enviezadas.

Seja $\mathcal{T}$ o plano que contém $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{T} \parallel \mathcal{R}$. Seja n um vetor normal a $\mathcal{T}$. Então, n pode ser calculado a partir de $n = (0,2,1) \times (0,1,-2)$. Tem-se

$$n = (0,2,1) \times (0,1,-2) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4e_1 - e_1 = (-5,0,0).$$

Considere um ponto $A \in \mathcal{T}$, por exemplo $A = (2,0,1) \in \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ e seja P um ponto quaquer de $\mathcal{R}$, por exemplo $P = (1,0,1) \in \mathcal{R}$. Tem-se $v_{AP} = P - A = (-1,0,0)$. Então, como $d(\mathcal{R},\mathcal{S}) = d(\mathcal{R},\mathcal{T}) = d(P,\mathcal{T})$, obtém-se

$$d(\mathcal{R},\mathcal{S}) = \|\operatorname{proj}_n v_{AP}\| = \frac{|v_{AP} \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|(-1,0,0)\cdot(-5,0,0)|}{\|(-5,0,0)\|} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1.$$

(b) Como $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ e $\mathcal{P} \parallel \mathcal{S}$ tem-se que

$$(x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(0,1,-2) + \mu(0,2,1),\ \ \lambda,\mu \in \mathbb{R},$$

é uma equação vetorial de $\mathcal{P}$. Um vetor perpendicular a $\mathcal{P}$ pode ser calculado da seguinte forma

$$n = (0,1,-2) \times (0,2,1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = e_1 + 4e_1 = (5,0,0).$$

Então, a equação cartesiana de $\mathcal{P}$ é dada pela expressão $5x = d$ e para determinar d substitui-se por exemplo as corrdenadas do ponto $(1,0,1) \in \mathcal{P}$ na expressão da equação cartesiana, pelo que $d = 5$. Assim, conclui-se que a equação cartesiana de $\mathcal{P}$ é definida por $5x = 5$.

(c) Seja $n = (5,0,0)$ o vetor normal a $\mathcal{P}$ e $v = (0,2,1)$ o vetor diretor de $\mathcal{S}$. A reta $\mathcal{S}$ é paralela ao plano $\mathcal{P}$, porque

$$n \cdot v = (5,0,0) \cdot (0,2,1) = 0.$$

Tem-se ainda que $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{P}$, porque, por exemplo $Q = (2,0,1) \in \mathcal{S}$ e $Q \notin \mathcal{P}$, porque $5 \times 2 = 10 \neq 5$. Seja A um ponto qualquer de $\mathcal{P}$, por exemplo $A = (1,0,0) \in \mathcal{P}$.

Então,

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = d(\mathcal{P}, Q) = \|\operatorname{proj}_n v_{AQ}\|.$$

Como $v_{AQ} = Q - A = (1, 0, 1)$, obtém-se

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \|\operatorname{proj}_n v_{AQ}\| = \frac{|v_{AQ} \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|(1,0,1) \cdot (5,0,0)|}{\|(5,0,0)\|} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1.$$

Capítulo 3 Cónicas e Quádricas

3.1 Exercícios

1. Escreva as seguintes cónicas na forma matricial.
   (a) $x^2 + 6xy + y^2 = 2$.
   (b) $x^2 - xy + 5x + 8y - 3 = 0$.
   (c) $5xy = 8$.
   (d) $2x^2 - 3xy + 4y^2 - 7x + 2y + 7 = 0$.
   (e) $4x^2 - 2y^2 = 7$.

2. Identifique e esboce as seguintes cónicas:
   (a) $x^2 + y^2 = 2$.
   (b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$.
   (c) $x^2 + 2y^2 = 1$.
   (d) $x^2 + 2y^2 - 2x = 0$.
   (e) $y = 2x^2$.
   (f) $x^2 + y - 1 = 0$.
   (g) $x^2 - 2y^2 - 1 = 0$.
   (h) $x^2 - 2y^2 + 1 = 0$.

3. Para cada uma das seguintes cónicas, determine a mudança de coordenadas de modo que a cónica resultante esteja na forma reduzida e identifique e esboce a cónica.
   (a) $x^2 - 4x - y^2 + 6y = 14$.
   (b) $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 13$.
   (c) $x^2 + 4xy + y^2 = 1$.
   (d) $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 36$.
   (e) $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 9$.
   (f) $-5x^2 + 2\sqrt{3}xy - 3y^2 = -6$.
   (g) $2x^2 + 2xy + 2y^2 + \sqrt{2}y = \frac{2}{3}$.

4. Escreva as seguintes quádricas na forma matricial.
   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
   (b) $3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xz + 4yz - 3x = 4$
   (c) $xy + xz + yz + 1 = 0$.
   (d) $3z^2 + 3xz - 12y = 6$.
   (e) $2x^2 - 3xy + 4y^2 - 7x + 2y + 7 = 0$.
   (f) $2z^2 + 2xz + y^2 + 2x - y + 3z = 0$.

5. Identifique as quádricas dadas pelas seguintes equações:

(a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$;
(b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0$;
(c) $x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 7$;
(d) $-4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$;
(e) $x^2 + 2z^2 - 4y = 0$;
(f) $2x^2 + 2z^2 + 3y = 0$;
(g) $3x^2 - 2y^2 = z$;
(h) $x^2 + 2y^2 = z^2$;
(i) $x^2 + 2y^2 = z$;
(j) $x^2 + 2y^2 = 1$;
(k) $2y^2 = z$;
(l) $x^2 - 2y^2 = 1$;
(m) $y^2 + 2z^2 - 4x = 0$;
(n) $y^2 + 2z^2 = 4x^2$;
(o) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$;
(p) $2x^2 + 2y^2 = 1$.

6. Classifique as seguintes quádricas:

(a) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$
(b) $2xy + z = 0$
(c) $x^2 - y^2 - z^2 + 4x - 6y - 9 = 0$
(d) $2x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xz + 2x + 2z - 3 = 0$
(e) $x^2 - y^2 + z^2 - 4xy - 4yz - 1 = 0$
(f) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz - z = 0$
(g) $2x^2 + y^2 + z^2 + 4yz - 6 = 0$

Nota: Escreva a equação da quádrica na forma matricial $X^{\mathrm{T}}AX+BX+c = 0$. Determine uma matriz P que diagonaliza A e mostre que $P^{\mathrm{T}}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal. Escreva a equação da quádrica na forma reduzida e identifique a quádrica.

3.2 Soluções

1. Escreva as seguintes cónicas na forma matricial.

   (a) $x^2 + 6xy + y^2 = 2$.

   (b) $x^2 - xy + 5x + 8y - 3 = 0$.

   (c) $5xy = 8$.

   (d) $2x^2 - 3xy + 4y^2 - 7x + 2y + 7 = 0$.

   (e) $4x^2 - 2y^2 = 7$.

   (a) A forma matricial da cónica é

   $$X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0,$$

   onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $c = -2$.

   (b) A forma matricial da cónica é

   $$X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0,$$

   onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $c = -3$.

   (c) A forma matricial da cónica é

   $$X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0,$$

   onde $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $c = -8$.

   (d) A forma matricial da cónica é

   $$X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0,$$

   onde $A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -7 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $c = -7$.

   (e) A forma matricial da cónica é

   $$X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0,$$

   onde $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $c = -7$.

2. Identifique e esboce as seguintes cónicas:

   (a) $x^2 + y^2 = 2$.

   (b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$.

   (c) $x^2 + 2y^2 = 1$.

   (d) $x^2 + 2y^2 - 2x = 0$.

   (e) $y = 2x^2$.

   (f) $x^2 + y - 1 = 0$.

   (g) $x^2 - 2y^2 - 1 = 0$.

   (h) $x^2 - 2y^2 + 1 = 0$.

   (a) Circunferência (de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{2}$).

   (b) Circunferência (de centro $(1, -2)$ e raio 1).

   (c) Elipse (de centro $(0, 0)$ e semi-eixos 1 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

   (d) Elipse (de centro $(1, 0)$ e semi-eixos 1 e $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

   (e) Parábola (de vértice $(0, 0)$ voltada para cima).

   (f) Parábola (de vértice $(0, 1)$ voltada para baixo).

(g) Hipérbole.

(h) Hipérbole.

3. Para cada uma das seguintes cónicas, determine a mudança de coordenadas de modo que a cónica resultante esteja na forma reduzida e identifique e esboce a cónica.

(a) $x^2 - 4x - y^2 + 6y = 14$.

(b) $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 13$.

(c) $x^2 + 4xy + y^2 = 1$.

(d) $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 36$.

(e) $2x^2 + 2xy + 2y^2 = 9$.

(f) $-5x^2 + 2\sqrt{3}xy - 3y^2 = -6$.

(g) $2x^2 + 2xy + 2y^2 + \sqrt{2}y = \frac{2}{3}$.

(a) Hipérbole.

(b) Hipérbole.

(c) Hipérbole.

(d) Elipse.

(e) Elipse.

(f) Elipse.

(g) Elipse.

4. Escreva as seguintes quádricas na forma matricial.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

(b) $3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xz + 4yz - 3x = 4$

(c) $xy + xz + yz + 1 = 0$.

(d) $3z^2 + 3xz - 12y = 6$.

(e) $2x^2 - 3xy + 4y^2 - 7x + 2y + 7 = 0$.

(f) $2z^2 + 2xz + y^2 + 2x - y + 3z = 0$.

(a) A forma matricial da quádrica é $X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $c = -2$.

(b) A forma matricial da quádrica é $X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0$, onde $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $c = -4$.

(c) A forma matricial da quádrica é $X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0$, onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $c = 1$.

(d) A forma matricial da quádrica é $X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0$, onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -12 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $c = -6$.

(e) A forma matricial da quádrica é $X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0$, onde $A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $c = 7$.

(f) A forma matricial da quádrica é $X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0$, onde $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, $B = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$, $X = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right]$ e $c = 0$.

5. Identifique as quádricas dadas pelas seguintes equações:

(a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$;
(b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 1 = 0$;
(c) $x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 7$;
(d) $-4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$;
(e) $x^2 + 2z^2 - 4y = 0$;
(f) $2x^2 + 2z^2 + 3y = 0$;
(g) $3x^2 - 2y^2 = z$;
(h) $x^2 + 2y^2 = z^2$;
(i) $x^2 + 2y^2 = z$;
(j) $x^2 + 2y^2 = 1$;
(k) $2y^2 = z$;
(l) $x^2 - 2y^2 = 1$;
(m) $y^2 + 2z^2 - 4x = 0$;
(n) $y^2 + 2z^2 = 4x^2$;
(o) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 1$;
(p) $2x^2 + 2y^2 = 1$.

(a) Elipsóide.
(b) Esfera.
(c) Hiperbolóide de uma folha.
(d) Hiperbolóide de duas folhas.
(e) Parabolóide elítico.
(f) Parabolóide circular.
(g) Parabolóide hiperbólico.
(h) Cone.
(i) Parabolóide elítico.
(j) Cilindro elítico.
(k) Cilindro parabólico.
(l) Cilindro hiperbólico.
(m) Parabolóide elítico.
(n) Cone.
(o) Hiperbolóide de uma folha.
(p) Cilindro circular.

6. Classifique as seguintes quádricas:

(a) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 3 = 0$
(b) $2xy + z = 0$
(c) $x^2 - y^2 - z^2 + 4x - 6y - 9 = 0$
(d) $2x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xz + 2x + 2z - 3 = 0$
(e) $x^2 - y^2 + z^2 - 4xy - 4yz - 1 = 0$
(f) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz - z = 0$
(g) $2x^2 + y^2 + z^2 + 4yz - 6 = 0$

Nota: Escreva a equação da quádrica na forma matricial $X^{\mathrm{T}}AX + BX + c = 0$. Determine uma matriz P que diagonaliza A e mostre que $P^{\mathrm{T}}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal. Escreva a equação da quádrica na forma reduzida e identifique a quádrica.

(a) Elipsóide
(b) Parabolóide hiperbólico
(c) Hiperbolóide de duas folhas
(d) Cilindro elíptico
(e) Hiperbolóide de uma folha
(f) Parabolóide elíptico

(g) Hiperbolóide de uma folha